

**THE BOOK WAS  
DRENCHED**

UNIVERSAL  
LIBRARY

OU\_191060

UNIVERSAL  
LIBRARY









كتاب البراعة المشرقية في علم الهندسة الوصفية  
تأليف حضرة صابر أفندي صبرى  
مدرس فروع الوصفيات  
بمدرسة الهندسة بمخازنه  
الهندية

---

\*( الجزء الاول )\*

يشتمل على ما يجب تدريسه من علم الهندسة الوصفية لتلامذة المدارس  
التجهيزية قبل دخولهم بالمدارس الخصوصية

---

قد قرر مجلس المعارف الاعلا في جلسته المنعقدة بتاريخ ٢٥ ابريل سنة ١٨٨٢  
افرنكية لزوم استعمال هذا الكتاب بالمدارس الاميرية المصرية

---

لا يجوز لاحد طبع هذا الكتاب مطلقا بدون اذن مؤلفه ومن يخارى  
على ذلك يخازى حسب القوانين

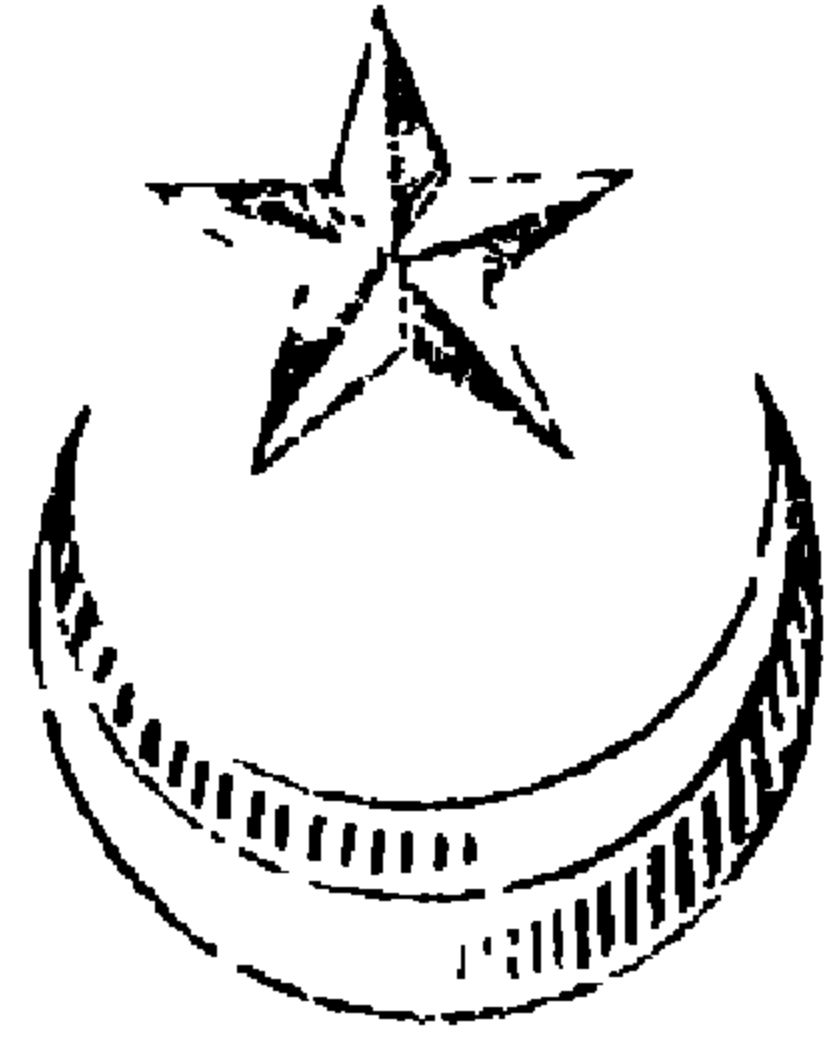
---

\*( الطبعة الاولى )\*

( بمطبعة ديوان عموم المعارف بدرب الجمايز )

سنة ١٢٩٩ هجرية

\*( على صاحبها افضل الصلاة وازكى التحية )\*



\*(بسم الله الرحمن الرحيم)\*

ان خير ما تصورته الافكار وجرت به اقلام الوصف من جليل الآثار حمد مسقط  
كرات الغيث على مستويات البقاع وشكر مهني مواقعها الذبيبة لانراج ما يجب  
الزراع مدير الكائنات على محور قدرته ومصور اشكال الخلق اوقات طبق ارادته  
وحكمته المنزه في ذاته عن الابعاد المتعالي في صفاته عن الانداد فسبحانه من اله  
بسطة هذه الكرة في كل وضع من الاوضاع ورفع السماء بلا عمد أقوم ارتفاع لاله  
الاه ولا تدركه الابصار وهو يدرك الابصار وهو اللطيف الخبير والصلاة والسلام  
على قاطع الطبقات الفراغية راقب اوج الاكرام الى ان وصل الى مستوعب فيه  
صريف الاقلام محمد الماسح رسوم الضلالة وتماثيل الجهالة وعلى آله المقتفين  
أنزه الكريم السالكين طريقه المستقيم (وبعد) فيقول المتوسل بمضى  
مناجى الرشاد بكوكب محياه الدرى والمترف بالتقصير عبده صابر صبرى مدرس  
علم الهندسة الوصفية وفروعه التطبيقية بمدرسة الهندسة مخانة الخديوية المصرية  
لما كان لهذا العلم من المقام الاسنى والمنزلة العلية المحسنة ما حاز به قصب السبق  
في ميدان العلوم وارتقى به أوج المنطوق والمفهوم لافتقار الصنائع اليه واحتياج  
الامور العمارية للعرض عليه وناهيك به من منبه للاذهان الخاملة ومرطب للقرايح  
الجمادة توجهت ارادة العالم الجليل والودعى الفضيل صاحب المناقب السامية

والهمم

\*(٣)\*

والهمم الا تصفية النامية حضرة اسمعيل بك الفايكى ناظر مدرسة الهندسة الى  
ان اجمع كتابى هذا الموضوع لينتشر في بين العموم ويضع فبادرت بتحقيق  
هذه الآمال الابوية قياما بواجب الخدمة الوطنية وجمعت فيه هذا الكتاب من  
كل مستلح مستطاب وسميته بالبراءة المشرقية في الهندسة الوصفية راجيا من واسع  
الافضال ومحقق الآمال ان ينفع به أبناء الديار المصرية المشمولة بمراحم الحضرة  
التوفيقية ليكون هذا الفضل منه واليه ويعود حسن التشكر لما أسداه عليه  
فلقد وجهه انظاره لنشر اعلام المعارف واعلاء بنود العوارف حقق الله في حسن  
التفاته الآمال واصلح لنا ولاخواننا الاحوال

\*(الباب الاول)\*

(في المخطوط المستقيمة والمستويات)

\*(الفصل الاول)\*

في بيان الغرض الاصلى من علم الهندسة الوصفية وفي طريقة المساقط  
بـ (مبادئ أوليه) من المعلوم أن جميع المسائل الرياضية يمكن حلها بالمعاملات  
رسمية أو بطرق وحسابات جبرية وجنس المسئلة هو الذى يعرفنا أى هاتين الطريقتين  
أحسن استعمالا لهما لان حل بعض تلك المسائل بالطريقة الرسمية قد يكون أسهل من  
حله بالطريقة الجبرية والبعض الآخر بعكس ذلك بمعنى أن حله بالطريقة الجبرية  
أقرب من الطريقة الرسمية وقد توجد بعض مسائل يستوى فيها استعمال احدى  
الطريقتين الرسمية والجبرية بدون أولوية

بـ فلذا انقسمت العلوم الرياضية الى قسمين متغايرين في الوضع لكنهما متقيدان  
في النتيجة والثمره فالقسم الاول هو فرع الهندسيات على العموم وهو الفرع الذى يبحث  
فيه عن معرفة الطرق الكافية لحل المسائل الرياضية بواسطة الاعمال الرسمية التى يمكن  
اجراؤها عليها والثانى هو فرع الجبريات وهو الفرع الذى يبحث فيه عن معرفة الطرق  
الجبرية والحسابية اللازمة لحل المسائل الرياضية المذكورة أما الفرع الثانى فلا نستغل  
به هنا حيث ان مقصودنا هو الاشتغال بالفرع الاول فقط وهو فرع الهندسيات فنقول  
بـ لا يحنى على كل من درس الهندسة العادية التى هى مبادئ فرع الهندسيات أن

طرقها غير كافية لحل جميع المسائل الرياضية وفي الواقع كذلك لان الهندسة العادية متقدمة بحسب طبيعة الاشكال المتعلقة بها الى قسمين اولهما هو الهندسة المستوية وثانيهما هو الهندسة الفراغية ففي القسم الاول يبحث عن خواص الاشكال الموجودة في مستو واحد وعن حل المسائل الرياضية الممكن حصر جميع اجزائها في فرخ من الورق وهذا القسم وان كان غير كاف لحل بعض تلك المسائل اعني المسائل المستوية لكنه كاف لحل اغلبها واما القسم الثاني فلا يكون أن موضوعه الاشكال الفراغية والاجسام التي لا يمكن حصرها في مستو واحد وهو غير كاف لحل المسائل المتعلقة بها حلا حقيقيا

مثلا الهندسة العادية وان دلت على الطريقة النظرية لايجاد البعد الا صغر بين مستقيمين غير موجودين في مستو واحد ذلك انهما لم يتوصل الى معرفة حقيقة البعد المذكور ولا الى تعيين وضع المستقيمين المذكورين في الفراغ بالنسبة لبعضهما

وكذلك قد بينت الهندسة العادية طريقة نظرية لاراسط كروي بأربع نقط معلومة في الفراغ وليست موجودة في مستو واحد ذلك انهما لم يتوصل الى معرفة الوضع الحقيقي لمركز هذه الكرة بالنسبة للنقط المعلومة ولا الى معرفة حقيقة نصف قطر هذه الكرة وبالجملة فهي غير كافية لتعيين الكرة المذكورة بالرسم تبيننا حقيقيا

بمساعدة والحاصل ان الهندسة العادية قاصرة على بيان الطرق النظرية اللازمة تتبعها في حل بعض المسائل الرياضية فقط وليست كافية لحل تلك المسائل حلا قطعيا فلذا اضطر الانسان بحسب احتياجاته الضرورية الى البحث عن الطرق الكافية والاعمال الشافية التي بها يمكنه حل المسائل الرياضية التي يسر عليه حلها بواسطة الهندسة العادية فياجتهاده المستمر في تتبع أعمال سلفه ووصول ما أوجده المتقدمون عليه من النتائج والبراهين العقلية اليه توصل الى مقصوده فوضع علم الهندسة الوصفية التي بها توصل الى حل جميع المسائل الرياضية المتعلقة بالاجسام والاشكال الفراغية

بمساعدة انما يسمى بعلم الهندسة الوصفية لانه ليس قاصرا على حل المسائل الرياضية كما تقدم بل ان من اخص منافعه ومزاياه كونه يساعد المهندسين على وصف ما يريد وصفه لاقرانه المهندسين من الاجسام التي اخترعها او التصميمات التي صنعها من بيوت وآلات ومبان واشغال علمية او ما يريد وصفه من ذلك الى ارباب الصنائع كالنجارين والنجارين والبنائين وعموم ارباب طائفة الممارسة فاجب ان يبحث بتدبير للصانع انشاء الجسم الموصوف بحسب أبعاده وتفاصيله المطلوبة وهذا الوصف انما يكون برسم تلك

الاشياء لهم بواسطة الطرق الهندسية على فرخ من ورق وابدائها لمن يريد معرفة حقيقة وتفاصيل تلك الاشياء

ويعلم مما تقدم أن علم الهندسة الوصفية هو كلغة مختصرة اخترعها المهندسون لتوصيل أفكار بعضهم لبعض بواسطة الرسم الوصفى لأن المهندس ربما يفهم من الرسم في ظرف دقيقة ما لا يفهمه بالوصف المعتاد في ظرف ساعة وأما بالنسبة لأرباب الصنائع فإن الرسم الوصفى يكون عندهم كترجمان ما يعرفونه من أغراض المهندس وسرأفكاره التي أودعها في الرسم

بـ ٢٤ فاستبان حينئذ من جميع ما ذكر أن الغرض الاصلى من علم الهندسة الوصفية أمران الاول رسم الاجسام ذات الثلاثة ابعاد على فرخ من ورق ذى بعدين والثانى معرفة الطرق الرسمية اللازمة لحل جميع المسائل الرياضية المتعلقة بالاشكال الفراغية وغيرها

وقد يظهر للطالب في أول الامر أن في الحصول على هذين الامرين صعوبة بين الاولى كون الاجسام على العموم ذات ثلاثة أبعاد وكيف يمكن حصرها بالرسم في فرخ من ورق ذى بعدين فقط والثانية هي انه ينبغي في الهندسة الوصفية رسم الاشياء على حقيقتها وبحسب الاوضاع الشاغلة لها حتى ان النتائج التي تحصل بعد حل المسائل تكون مبينة بحقيقةتها أيضا بغاية الضبط والدقة ولاشك انه يتوهم في ذلك صعوبة أيضا لكن قد زالت الصعوبات وصار الحصول على الغرض المطلوب بواسطة استعمال طريقة المساقط وهي التي سنشرح لك اصولها فنعول

بـ ٢٥ طريقة المساقط (شكل ١٠٤) اذا أنزل من نقطة موضوعة في الفراغ كنقطة ا عمود كالعمود ا ا على مستو ثابت كالستوى وضع خ سميت نقطة ا التي هي موقع هذا العمود على المستوى الثابت مسقط نقطة ا على المستوى المذكور وأيضا اذا أنزل من جميع نقط المستقيم ا ب . . . . . أعمدة تسمى الخط الجامع للنقط ا ب و . . . . . مسقط مستقيم ا ب على المستوى الثابت ويلزم أن يكون هذا المسقط بالضرورة مستقيما لانه حيث كانت جميع هذه الاعمدة موجودة في المستوى المار بأحدها وهو ا ا وبالمستقيم ا ا يلزم أن يكون المسقط ا ب و كتابة عن خط تقاطع المستوى ا ا الذي يسمى المستوى المسقط مع المستوى وضع خ الذي يسمى المستوى المسقط

بشـد على العموم مسقط أى منحني مثل م هـ ط هو الخط الجامع لواقع الاعمدة م م  
و هـ ط ط ر . . . . . المنزلة من نقطة المختلفة على المستوى الثابت وفي العادة  
يكون هـ ذا المسقط م هـ ط . . . . . خطا انحناءه بخلاف لانحناء المنحني المعلوم في  
الفراغ وايضاية يكون من مجموع هـ الاعمدة سطح اسـطواني يسمى بالاسطوانة  
المسقط للمنحني م هـ ط

بشـد وحيث يمكن أن يقال ان كلاما من النقطة أو المستقيم أو المنحني الفراغي يصير  
معين الوضع بالكتابة متى علم مسقطا كل منها على مستويين ثابتين وضعهما معلوم وليسا  
متوازيين لانه في الواقع اذا فرض أن م ض غ م ض غ م مستويان بهذه الصفة  
وفرض أن آ و آ هما المسقطان المعلومان لنقطة فراغية حيثما اتفق فاذا أقيم من  
نقطة آ عمود غير محدود مثل آ آ على المستوى م ض غ م لزم أن يكون هذا العمود  
مارا بالنقطة المطلوبة وكذا يلزم أن تكون النقطة المذكورة موجودة على العمود آ آ  
المقام من نقطة آ على المستوى م ض غ م وحيث ان تلك النقطة لا يمكن أن تشغل  
في الفراغ سوى وضع واحد يلزم أن تكون موجودة في نقطة تقابل هذين العمودين  
بعضهما

وفي الحقيقة اذا لم يتقابل المستقيم آ آ مع المستقيم آ آ فلا يوجد في الفراغ نقطة يكون  
مسقطاها آ و آ ولا شك ان هذا يدل على انه لا يصح اتخاذ مسقطي النقطة بكيفية  
اختيارية بالكتابة وأنه يوجد بينهما علاقة سنذكرها فيما سيأتي (بشـد ١٧)

بشـد (شكل الوجه ١) فاذا فرض الآن أن آ و آ مسقطا مستقيم مجهول  
على المستويين الثابتين م ض غ م وتصورنا مستويا كالمستوى آ آ  
غير محدود الامتداد مارا بالمسقط الاول وعموديا على المستوى م ض غ م فان هذا  
المستوى يلزم أن يكون مشتملا على المستقيم المطلوب وايضا يكون موجودا في المستوى  
آ آ المار بالمسقط الثاني آ آ والعمودى على م ض غ م وحيث يمكن ان يكون الخط المجهول  
موجودا بالضرورة في محل تقاطع هذين المستويين الذى هو مستقيم واحد معين انما  
توجد حالة واحدة لا يمكن فيها تعيين المستقيم الفراغي بواسطة مسقطيه وهى الحالة التى

\*(٧)\*

يتحدد فيها المستويان المسقطان  $\alpha$  و  $\alpha'$  وبصيران مستويا واحدا ولا شك ان ذلك لا يحصل الا اذا كان المستوى المار بكل من المستقيم الفراغي ومسقطيه عموديا بالضبط على الفاصل المشترك بين المستويين الثابتين الذي هو  $xy$  وحيث ان مثل هذين المسقطين لا يكون كافيا لتحديد المستقيم المطلوب بل يلزم طلب مسقط ثالث على مستوي ثابت آخر غير مواز للفاصل المشترك بين المستويين الاولين

بـ  $\alpha$  وبالمجالة اذا علم المسقطان  $\alpha$  و  $\alpha'$  لمنحن مجهول يتصور اسطوانة عمودية على المستوى  $xy$  مارة بالمسقط الاول واسطوانة أخرى عمودية على المستوى  $xy$  مارة بالمسقط الثاني فمن حيث ان المنحنى المطلوب يلزم ان يكون موجودا بالطبيعة على كل من هذين السطحين الاسطوانيين فيكون هو خط تقاطعهما  $xy$  الذي يجوز ان يكون منحنيا شماليا أي مضاعفا الانحناء بمعنى ان نقطة ليست موجودة كلها في مستوي واحد

بـ  $\alpha$  ليكن معلوم بناء على ما ذكرنا من الآن فصاعدا ان من النقط والخطوط في الرسم بواسطة مسقطي كل منها بحيث متى قلنا ان النقطة الفلانية او الخط الفلاني معلوم يلزم ان يفهم من ذلك ان مسقطي تلك النقطة او مسقطي ذلك الخط هما المعلومان فقط وأما السطوح فنذكر فيما سيأتي به  $\alpha$  ما يلزم تقريره من الاعتبارات التي على مقتضاها يجب بيان السطوح بالرسم على مستويي المسقط

بـ  $\alpha$  قد فرضنا لآن ان خطوط الاسقاط مستقيمة عمودية على المستوى الثابت ليكن يلزمنا ان ننبه هنا على انه يجوز احيانا اتخاذ المستقيمات المسقطة مائلة على المستوى المذكور وموازية لاتجاه معلوم وتكون النتائج المتحصلة بهذه الطريقة هي عين النتائج التي وجدت في حالة ما تكون المستقيمات المسقطة عمودية على المستوى الثابت لكن بمنعنا استعمال طريقة الاسقاط المائل بجملة موانع صعبة منها ان طريقة الاسقاط المذكورة تكون على العموم أصعب في العمل من الطريقة الاولى ومنها ان النتائج التي تحصل بواسطتها تكون أقل ضبطا مما يحصل بطريقة الاسقاط العمودي لان المستقيمين المتقاطعين على زاوية حادة تكون بالبداهة نقطة تقاطعهما أقل وضوحا وتحديد اقل من نقطة تقاطع المستقيمين المذكورين في حالة ما اذا كانا متقاطعين على زاوية قائمة



بـ ٤٤ بناء على هذه الاسباب يكون معلوما من الآن فصاعدا أن المعتبر عندنا دائما  
هو المساقط العمودية ما لم ينبه على عكس ذلك اذا لزم الحال تنبيهها خصوصا  
وايضاً قد جرت العادة بسبب مواع كالموانع المتقدمة بأن ينتخب المستويان الثابتان أعني  
مستويي المسقط و  $ض\ غ$  متعامدين على بعضهما ثم انه لاجل سهولة  
تصوره ما يفرض في الغالب ان أحدهما أفقي والآخر رأسي وسمى خط تقاطعهما  
 $ض\ غ$  الذي هو مستقيم مهم خط الارض

بـ ٤٥ يشاهد حينئذ مما تقدم ان طريقة الاسقاط السابقة كافية لتبيين معالم أى  
مسألة بالرسم تبيننا ما فالباقي علينا حينئذ هو تنويع هذه الطريقة فقط بحيث يمكن  
اجراء جميع العمليات على مستوي واحد كما هو الغرض الاصل من علم الهندسة الوصفية  
اذ يدون ذلك تكون طريقة الاسقاط المتقدمة صعبة جدا ان لم نقل مستحيلة لانها  
تكون حينئذ داعية لان يكون الرسم حاملا معه دائما لوحين متعامدين على بعضهما  
من الخشب أو غيره لئلا نخذلها مساقط الاشياء التي تصادفها في اثناء عملها ولا يخفى  
ما في ذلك من الصعوبة

### \*(نحويل مستويي المسقط الى مستوي واحد)\*

بـ ٤٦ لاجل الوصول الى هذا الغرض أعني لاجل تحويل جميع العمليات الى مستوي  
واحد وهو سطح الفرخ الورق نتصور بعـ ٤٧ ان نسقط النقط والخطوط المعلومة على  
المستويين  $ض\ غ$  و  $ض\ ح$  المتعامدين على بعضهما أن المستوي الاخير الذي هو  
الرأسي قد دار حول خط الارض  $ض\ غ$  حتى انطبق على المستوي الأفقي لاجل ان  
لا يتكون عنهما سوى مستوي واحد مثل  $ض\ ح$  وهو الذي يرسم عليه في الحقيقة جميع  
العمليات التي كان ينبغي اعمالها على المستويين الاصليين لكن ينبغي ان يلاحظ دائما أن  
هذا التطبيق لم يستعمل الا لتسهيل اجراء العمل فقط بحيث متى لزم الحال لتصور أى  
عملية كانت باعتبارات هندسية ينبغي ان يتصور عقلنا أن المستوي الرأسي يرجع عن  
الانطباق الى وضعه الاصل أي صار عموديا على المستوي الأفقي

بـ ٤٧ (شكل ١ لوحة ١) بعد تطبيق المستويين الثابتين على بعضهما يرى انه  
يوجد بين مسقطي النقطة الواحدة من الفراغ علاقة أى ارتباط مهم ينبغي ملاحظته  
لانه حيث كان أحد المستقيمين  $أ\ أ'$  الساقطين لنقطة  $أ$  الفراغية في نقطة  $أ'$

وفي نقطة  $\alpha$  عموديا على المستوى الافقي والآخر عموديا على المستوى الرأسى ينبغي بناء  
على ذلك ان يكون المستوى  $\alpha\alpha'$  المار بهذين المستقيمين عموديا على مستويي المسقط  
في آن واحد حيث يكون عموديا على فاصلهما المشترك  $\alpha\alpha'$  واذن فالمستوى  $\alpha\alpha'$   
يقطع المستويين المذكورين في مستقيمين مثل  $\alpha\alpha'$  و  $\alpha\alpha'$  عموديين على  $\alpha\alpha'$   
ومتلاقين في نقطة واحدة مثل نقطة  $\alpha$  على خط الارض المذكور  
اذا تقرر هذا يقال حينئذ يدور المستوى الرأسى  $\alpha\alpha'$  حول  $\alpha\alpha'$  فيجذب معه  
المستقيم  $\alpha\alpha'$  الذي لا يزال في أثناء الحركة عموديا على محور الدوران  $\alpha\alpha'$  وبناء  
على ذلك يوجد من بعد انطباق المستوى الرأسى على المستوى الافقي ان المستقيم  $\alpha\alpha'$   
قد اخذ وضعه مثل  $\alpha\alpha'$  هو بالضرورة امتداد المستقيم  $\alpha\alpha'$  وعلى هذا يعلم ان  
المسقطين  $\alpha\alpha'$  و  $\alpha\alpha'$  لنقطة فراغية واحدة يوجدان دائما على مستقيم واحد عمودى  
على خط الارض  $\alpha\alpha'$  وذلك من بعد انطباق مستويي المسقط على بعضهما بحيث اذا  
أخذ أحدهذين المسقطين وهو  $\alpha\alpha'$  مثلا بالاختيار لم أن يقام المستقيم  $\alpha\alpha'$  في الغير  
محدد عموديا على  $\alpha\alpha'$  ويوضع بعد ذلك المسقط الثانى وهو  $\alpha\alpha'$  في أى نقطة من  
امتداد العمود  $\alpha\alpha'$

بمساعدة من خصوص المستقيم  $\alpha\alpha'$  فاننا اذا طبقنا نقطة الثانية  $\alpha\alpha'$  في  $\alpha\alpha'$  صار مسقطه  
الرأسى  $\alpha\alpha'$  منطبقا على  $\alpha\alpha'$  لكن لا يكون بين هذا الانطباق وبين المسقط الافقى  
 $\alpha\alpha'$  أدنى ارتباط ضرورى بحيث يمكن اعتبار أى خطين مثل  $\alpha\alpha'$  و  $\alpha\alpha'$  مرسومين  
بالاختيار كمسقطين لمستقيم واحد فراغى ما عدا الحالة الخصوصية التى يكون فيها  
المسقط  $\alpha\alpha'$  عموديا على خط الارض  $\alpha\alpha'$  لان المسقط الرأسى له يلزم ان يكون  
في هذه الحالة كتابة عن امتداد المسقط  $\alpha\alpha'$  لكننا نهنأ في بناء على ان مسقطين  
اثنين بهذه الصفة لا يكفيان في هذه الحالة الخصوصية لتعيين وضع المستقيم الفراغى  
بمساعدة وتوجه مدحالة أخرى لا يكون فيها المسقطان  $\alpha\alpha'$  على مستقيم واحد فراغى  
وهى الحالة التى يكون فيها كل من المسقطين عموديا على خط الارض وليس امتلاقين معه

في نقطة واحدة لانك اذا امرت بأحدهما مستويا وعموديا على المستوى الافقي وبالاخر مستويا وعموديا على المستوى الرأسى صار هذان المستويان متوازيين فلا يعينان وضع أى مستقيم ما

بنسبة من الآن فصاعدا سنضع مستويي المسقط باعتبارهما في حالة انطباق بحيث يكون خط الارض  $خ$  ض  $خ$  شاعلا الوضع المبين في (شكل ٢ لوحة ١) وبناء على ذلك يكون الجزء  $و$  ض  $خ$  من ورقة الرسم دالافى  $آن$  واحد على كل من الجزء المقدم من المستوى الافقى والجزء الاسفل من المستوى الرأسى الذى دار وانطبق على الجزء المقدم المذكور وأما الجزء ض  $خ$  من  $ر$  من ورقة الرسم فإنه يشتمل على الجزء الاعلى من المستوى الرأسى وعلى الجزء المؤخر من المستوى الافقى ولا يكفى حينئذ لاجل تعيين النقطة الفراغية أن يعطى مسقطاها  $ا$  و  $آ$  (شكل ٢) فقط بدون تمييزهما عن بعضهما بل يلزم أن يذكر أيضا ما اذا كانت النقطة  $ا$  هى المسقط الافقى للنقطة الفراغية أو هى مسقطها الرأسى لأن كلا هذين الفرضين صحيح وممكن اعتباره لكن بينهما ما فرق كبير جدا من حيثية الوضع الحقيقي للنقطة الفراغية وحينئذ فلاجل أن ناهم الطالب ونبين له النسبة التابع لها كل من المسقطين قد اتفقنا على أن نسمى على الدوام المساقط الافقية بالنقط أو المستقيمات بحروف خالية عن العلامات والمساقط الرأسية لها نسميها بنفس الحروف التى سميت بها مساقطها الافقية لكن يلزم ان يوضع على كل منها العلامة المعروفة بالنقطة (بريم) مثلا النقطة (ا و آ) (شكل ٢) تدل على النقطة الفراغية والمسقط افقى فى نقطة ا ورأسيا فى آ ونقطة (ب و ب) تدل على النقطة الفراغية التى مسقطها الافقى ب ومسقطها الرأسى ب وكذلك نعتبر بمساقط كل من نقطتى (ح و ح) و (د و د) باعتبار المتقدم وعلى التلامذة أن يعودوا فكريهم بكثرة القرين على تصور الاوضاع المختلفة الشاعلة لها هذه النقط المختلفة فوق او تحت أو امام أو خلف مستوى المسقط لى بذلك يسهل عليهم معرفة الوضع التى تشغله أى نقطة معلومة بمسقطيها هما كانت النقطة المذكورة فى أى زاوية من الزوايا الوجية الاربعة المتكونة بين مستويي المسقط

بنسبة (شكل ٣ لوحة ١) الاصطلاح الذى اتبعناه فى تسمية مساقط النقط يلزم تطبيقه أيضا على الخطوط مثلا المستقيم (ا ب و آ ب) هو كناية عن المستقيم الفراغى الذى مسقطه

مسقطه الافقى ا ب ومسقطه الرأسى آ ب ولكن حيث ان وضع أى مستقيم يصير  
معينا اذا علم منه نقطتان فيلزمنا حينئذ ان نشرح الطريقة العمومية لايجاد أثرى أى  
مستقيم أعنى نقطتى تقابل هذا المستقيم مع مستوي المسقط فنقول

حيث ان الاثر الرأسى للمستقيم ( ا ب و آ ب ) هو نقطة مشتركة بينه وبين  
المستوى الرأسى فيلزم حينئذ ان يكون مسقطه الافقى موجودا على خط الارض خ ض  
وعلى الخط ا ب الغير محدود الطول أيضا وحينئذ فيكون المسقط الافقى لهذا الاثر هو  
نقطة ح وبناء عليه يكون الاثر المذکور موجودا على احدى نقط الخط الرأسى ح د  
لكن حيث انه يوجد بالضرورة على المسقط الرأسى آ ب الغير المحدود فيكون حينئذ  
هو نقطة د ومن ذلك تلحق قاعدة عمومية ينبغي التعمين على استعمالها كثيرا فى الاحوال  
المختلفة لاوضاع المستقيم وهى ان يمد المسقط الافقى للمستقيم المعلوم حتى يتلاقى مع خط  
الارض فى نقطة فيقام منها عمود على خط الارض ويمد حتى يتلاقى مع المسقط الرأسى  
للمستقيم فى نقطة تكون هى الاثر الرأسى للمستقيم المعلوم

وأیضا حيث ان الاثر الافقى للمستقيم نفسه هو كاية عن نقطة موضوعة فى آن واحد على  
المستوى الافقى وعلى المستقيم المعلوم فيكون مسقطه الرأسى موجودا على كل من خط  
الارض خ ض والمسقط الرأسى آ ب الغير المحدود أعنى فى نقطة د وبناء على ذلك  
يكون الاثر الافقى نفسه موجودا على احدى نقط المستقيم د و المقام هو دى على خط  
الارض من نقطة د ولكن حيث ان هذا الاثر يوجد بالضرورة أيضا على المسقط  
الافقى ا ب الغير المحدود فهو حينئذ نقطة و

ومن ذلك يؤخذ انه للحصول على الاثر الافقى يمد المسقط الرأسى للمستقيم المعلوم حتى  
يتلاقى مع خط الارض فى نقطة فيقام منها عمود عليه ويمد هذا العمود حتى يتلاقى مع  
المسقط الافقى فتكون نقطة تلاقيهما هى الاثر الافقى المطلوب

بمسند وبالعكس اذا علم الاثران د و د لمستقيم أمكن ايجاد مسقطيه لانه  
حيث كانت نقطة د من نقط المستقيم الفراغى نفسه فاذا انزل منها عمود كالعمود  
ح د على خط الارض كانت نقطة تقابل هذا العمود بخط الارض نقطة من المسقط  
الافقى للمستقيم ويكون هذا المسقط بالضرورة هو د وبالمثل اذا سقطنا نقطة و  
التي هى من نقط المستقيم المعلوم رأسيا على خط الارض فحصلت نقطة مثل د من

المسقط الرأسى الذى يصير بناء على ذلك كتابة عن المستقيم و  
ومن المستحسن أن يبحث المعلم تلامذته على كثرة التمرين على حل هاتين المسئلتين  
المتضادتين في جملة مستقيمتين مختلفتين الأوضاع كالمستقيم (هو و هو) (شكل ٤ لوحة ١)  
الذى أثره الافقى نقطة و وأثره الرأسى نقطة ط أو كالمستقيم (م ه و م ه)  
(شكل ٥ لوحة ١) الذى أثره الرأسى نقطة ق وأثره الافقى نقطة ك  
بمسند (قواعد في التنقيط المصطلح عليها) قبل انتهاء الكلام على التعاريف  
الاولية يلزمنا أن نضع هنا بعض قواعد أصليّة ينبغي مراعاتها عند رسم أى شكل من  
الهندسة الوصفية فنقول

حيث كان الغرض من هذه الرسومات هو تبين شكل الاشياء بالرسم مع غاية الضبط  
والدقة فيلزم أن تكون أجناس الخطوط التى تستعمل فيها كافة يفهمها الناظر بالعود  
عليها أعنى أنها تورى الوضع الخاص لجميع الاجزاء المختلفة وتميز ما كان منها ظاهرا  
وما هو مخبأ بالنسبة لوضع الناظر لها وتساعد على التمييز بين الاشياء الناتجة من المسئلة  
وبين الخطوط التى لم ترسم الا للمساعدة على الحصول على هذه الاشياء فقط فالذا صار  
الاتفاق على القواعد الآتية للسير على مقتضاها دائما

فأولا الخطوط الاصلية أعنى التى تدل على معالم أى مسئلة أو على نتائجها يجرى رسمها  
خطوطا كاملة مستمرة متى كانت مشاهدة اما اذا كانت تلك الخطوط الاصلية غير  
مشاهدة لزم بيانها بخطوط نقطية أعنى مركبة من نقط مدورة قتال النوع الاول وهو  
الخطوط الكاملة المستمرة مبين في (شكل ٦ لوحة ٢) بالخط ا ب ح هو ومثال الثانى  
خط ر ح ط ك ل من نفس الشكل المذكور

وثانيا الخطوط المساعدة أعنى الخطوط التى ليست من خطوط القسم الاول ولم يوثق بها  
الاتصال الى حل المسئلة وهذه الخطوط يلزم بيانها في الرسم بخطوط مجزئة أعنى مركبة  
من جملة اجزاء خطية غير متصلة ببعضها وذلك مثل الخط م (شكل ٦) وليس لازما هنا  
التمييز بين ما هو مشاهد من هذه الخطوط وما هو مخبأ منها لانه ليس لها فى الحقيقة وجود  
بل فقط يتصورها المهندس فى ذهنه للوصول الى النتيجة المطلوبة

وثالثا قد توجد من ضمن هذه الخطوط المساعدة خطوط كثيرة الاهمية بالنسبة  
لامثالها ويراد تحويل النظر والالتفات اليها زيادة عن غيرها فمثل هذه الخطوط تبين  
فى الرسم بخطوط مختلطة أعنى مركبة من اجزاء خطية صغيرة منفصلة عن بعضها بنقطة

مدورة أو نقطتين وذلك مثل المستقيمين هـ و سـ (شكل ٦) انما لا ينبغي استعمال هذه الخطوط لرسم المستقيمات العمودية على خط الارض التي لم يكن القصد منها سوى الوصل بين مسقطي نقطة واحدة فقط

به ٢٤ قد ذكرنا في البند السابق أن الخطوط الاصلية من أى مسـالة تكون اما مشاهدة فيلزم رسمها خطوطا كاملة واما مخبأة فيلزم رسمها نقطية والآن نبين الكيفية التي بها يمكن التمييز بين خطوط هـ ذين النوعين فنقول من المعلوم انه وان كان لا يمكن اعطاء قواعد مستوفية لهذا الخصوص الا من بعد الكلام على السطوح المنحنية لكن من حيث ان المسائل الاولى التي سنشتغل بها الآن لا يوجد فيها خطوط سوى المستقيم ولا سطوح سوى السطح المستوي فيكفي بنا حينئذ موقفا ان نقرر هنا الاعتبار والاصطلاحات الآتية

به ٢٥ يعتبر دائما أن الرسم الذي يأخذ مساقط جميع الاشياء على المستوى الافقي واقف على بعد لانهاى من المستوى المذكور من جهة فوق على الخط الرأسى المسار باحدى نقط ذلك الشئ ونقطة بصره موجودة امام المستوى الرأسى وهذا الاعتبار الذى به يسهل علينا رسم المحيط الظاهرى للسطوح المنحنية كما سنشاهد ذلك فيما سياتى انشاء الله تعالى في به ٣٨ ما أخذوه مستخرج من طريقة اسقاط نقطة فراغية على مسـتو وفي الواقع لان الاشـعة البصرية الواصلة من عين الرسم الى جميع نقط الجسم تقرب كثيرا من ان تصبح عمودية على المستوى الافقى كلما زادت ارتفاع الرسم عن المستوى المذكور مع انتقاله دائما على خط رأسى واحد بحيث متى صارت نقطة البصر موجودة في بعد لانهاى صارت هذه الاشعة متوازية واتحدت مع المستقيمات المسـطرة لنقط الجسم المنظور ومن هنا يشاهد ان المسـقط الافقى لاى شئ كناية عن منظور ذلك الشئ الذى أخذنا اعتبار نقطة بصر متباعدة بعد لانهاىا وموجودة على الخط الرأسى وهذه النتيجة محقة لما تقر في مبدأ الاعتبار الذى نحن بصدد

وبمثل هذه الاسباب يعتبر دائما أن المسـقط الرأسى لاى شئ مأخوذا باعتبار أن الرسم موجود امام المسـتوى الرأسى وفوق المستوى الافقى ونقطة بصره هذا الرسم موضوعة في بعد لانهاى من المسـتوى الرأسى على العمود المقام على المستوى المذكور من احدى نقط الجسم المقروض

وبمقتضى ذلك فكل خط أو جزء من خط أصـلى وجد تحت المستوى الافقى أو خلف

المستوى الرأسى فهو مغبأ أعنى غير مشاهد وبناءه على ذلك يلزم تنقيطه أعنى رسمه بنقط مدورة

وكذا اذا وجد فى المسئلة بعض مستويات لها وجود حقيقى وكان جزء من خط أصلى موضوعا خلف احدها هذه المستويات او تحتها بالنسبة لوضع الرسم لازم ايضا تنقيط الجزء المذكور امكننا لانزال نذكر الطالب ايضا انه ليس لهذه التميزات لزوم فى الخطوط المساعدة كما نهنأ على ذلك فى (ب ٢٣ د) ويمكن معرفة تطبيقات هذه القواعد فى كل من الاشكال ٣، ٤، ٥، ٦ وبالجمله فاننا سنذكر بها الطالب ايضا فى أغلب المسائل التى سنورد حلها

(ملحوظة مهمة) ينبغى قبل رسم أى لوحة من لوحات الهندسة الوصفية أن تراعى الاحتراسات الآتية وهى أن يجبرأولا بالقلم الرصاص مستقيم غير محدود فى وسط ورقة الرسم ومواز تقرىبه بالطول ولها تم يقام على وسط هذا المستقيم مستقيم آخر عمودى بالضبط على المستقيم الاول ويلزم لذلك استعمال طريقة البرجسل لان المثلث الخشب لا يمكن به الحصول على الضبط الكافى فى اقامة مستقيم عمودى على مستقيم آخر خصوصا فى حالة ما يكون العمود المطلوب ذا طول كبير نوعا لكنه يستعمل مع غايه الضبط والسرعة فى رسم المستقيمان المتوازيين ولذا انه من بعد رسم المستقيمين المتعامدين بالطريقة المتقدمه ترسم جميع الخطوط الموازية لخط الارض او العمودية عليه بالتوازي له مامع استعمال المثلثات الخشب بأن يوضع أحدهما بجوار الخط الذى يراد رسم الموازى له ثم يوضع المثلث الثانى بجانب الاول بحيث ينطبق أحد اضلاعه على أحد اضلاع المثلث الاول المذكور ثم يثبت المثلث الجديد ويحرك الاول بالاتكاه عليه الخ

ومما يجب التنبيه عليه هنا أيضا هو أن بعض الرسمة يجعلون خط الارض فى رسوماتهم أشخ من باقى الخطوط الاصلية ناظرين فى ذلك لكثرة اهمية الخط المذكور ولكفى أنصح التلامذة بان يحترسوا من اتباع هذا الرأى لانه ينشأ عن ذلك فى الغالب عدم ضبط فى تعيين وضع نقط تقاطعه بالمستقيمان الآخر فالاصوب حينئذ ان لا تجعل ثخناته أكثر من ثخنه باقى الخطوط الاصلية التى معه فى اللوحة

## \*(الفصل الثانى)\*

(فى مسائل متنوعة على المستقيمان والمستويات)

بنسبة (مسائل ابتدائية على المستقيمات) المطلوب رسم المستقيم المار بنقطتين معلومتين  
كنقطتي (ا و ا) و (ب و ب) (شكل ٧ لوحة ٢) ثم ايجاد البعد الحقيقي  
بين هاتين النقطتين

فلذلك يقال حيث كان المستقيم الذي يراد رسمه مارا بالنقطتين المعلومتين فيكون  
مسقطه الافقي بمقتضى ٧ د مارا بالنقطتين الافقيين ا و ب للنقطتين  
المذكورتين ومسقطه الرأسى مارا بالنقطتين الرأسيتين ا و ب لهما وبناء على ذلك  
يكون المسقط الافقي لهذا المستقيم هو ا ب ومسقطه الرأسى ا ب وبذلك  
يصير المستقيم الفراغى معينا باعتبارانه غير محدود

اما من خصوص البعد الحقيقي بين النقطتين (ا و ا) و (ب و ب) الذى مسقطاه  
هما ا ب و ا ب فلاجل تعيينه يقال من المعلوم ان المستقيم الفراغى يكون على  
الدوام اكبر من كل من مسقطيه الافقى والرأسى كل على حدته الافى حالتين اثنتين  
الاولى اذا كان المستقيم الفراغى موازيا الى المستوى الرأسى كان مسقطه على المستوى  
المذكور مساويا له بالضبط والثانية اذا كان المستقيم الفراغى موازيا الى المستوى  
الافقى كان مسقطه الافقى مساويا له أيضا لكن من حيث ان المستقيم المعلوم  
(ا ب و ا ب) ليس موازيا الى المستوى الرأسى ولا الى المستوى الافقى بدليل ان كلامنا  
مسقطيه غير مواز الى خط الارض غرض فلا يجوز اعتبار ا ب و ا ب من هذين المسقطين  
حقيقة للمستقيم الفراغى

واذن فلاجل ايجاد هذه الحقيقة يتوهم دوران المستوى ا ب ا المسقط افقيا  
للمستقيم المعلوم حول الرأسى ا ا المسقط افقيا للنقطة (ا و ا) فى نقطة ا بشرط  
ان يفرض ان المستقيم الفراغى ثابت فى هذا المستوى ومنجذب معه فى اثناء حركته الى  
ان يصير ذلك المستوى والمستقيم الفراغى الموجود فيه موازيين الى المستوى الرأسى  
للمسقط فى اثناء هذا الدوران تبقى نقطة (ا و ا) ثابتة لوجودها على محور الدوران  
واما نقطة (ب و ب) فانها ترسم فى الفراغ قوس دائرة موازيا الى المستوى الافقى  
فينسقط بناء على ذلك افقيا على قوس مثله كالقوس ب ب مركزه فى نقطة ا لانها  
مسقط جميع نقط محور الدوران الموجود عليه مركز القوس الفراغى ونصف قطره



عبارة عن البعد  $اب$  ورأسيا على مستقيم مواز لخط الأرض كالمستقيم  $ت ب$  وعند  
ما يصير المستقيم الفراغي موازيا إلى المستوى الرأسي يؤل مسقطه الأفقي إلى المستقيم  
 $ا ب$  الموازي لخط الأرض. وحينئذ فيكون المسقط الأفقي للنقطة المتحركة  $(ب ر ت)$   
بعد الحركة كتابة عن نقطة  $ب$  التي هي نقطة تقابل مسقط القوس بمسقط المستقيم من  
بعد الحركة ومسقطها الرأسي نقطة تقابل العمود المقام من المسقط الأفقي الجديد  $ب$   
على خط الأرض بالمسقط الرأسي للقوس أعني نقطة  $ت$  ومن هنا يرى أن المسقط الرأسي  
للمستقيم الفراغي قد آل من بعد الحركة إلى المستقيم  $ا ب$  الذي يكون بناء على ذلك  
مساويا بالضبط إلى حقيقة المستقيم الفراغي

بـ  $٢٧$  ويمكن أيضا إيجاد هذه الحقيقة بواسطة دوران المستوى المسقط رأسيا للمستقيم  
الفراغي حول الخط الأفقي المسقط رأسيا للنقطة  $(ا ر آ)$  في  $آ$  إلى أن يصير هو والمستقيم  
الفراغي الموجود فيه موازيا إلى المستوى الأفقي وفي هذه الحالة تكون العمليات  
والبراهين اللازمة أجراها مشابهة للعمليات والبراهين التي أجريت في الحالة المتقدمة  
ويكون المسقط الأفقي الجديد هو  $ا ب$  للمستقيم الفراغي من بعد أن يصير موازيا إلى  
المستوى الأفقي مساويا للحقيقة المستقيم الفراغي أو حقيقة البعد بين نقطتي  $(ا ر آ)$   
 $و (ب ر ت)$  المعلومتين

(نتيجة) إذا مد المستقيم  $ت ب$  على استقامته حتى تقابل مع امتداد الخط الرأسي  $ا آ$  في  
نقطة مثل  $ل$  حدث مثلث  $ب آ ل$  القائم الزاوية في  $ل$  وتره هو  $ب آ$  هو البعد  
الحقيقي بين النقطتين وضلع قائمته هو  $ل ب = ا ب = ا ب$  أعني يساوي للمسقط  
الأفقي للبعد بين النقطتين وضلع القائمة الثاني وهو  $ل آ = ل ك = ب ع = آ ك$   
أعني مساويا للفرق بين ارتفاعي النقطتين المعلومتين عن المستوى الأفقي المقدرين  
ببعدي مسقطيهما الرأسين عن خط الأرض

وأيضا إذا مد المستقيم  $ب ب$  على استقامته إلى أن يقابل المستقيم  $ا آ$  في نقطة مثل  $ط$   
حدث مثلث  $ا ب ط$  وتره هو  $ا ب$  هو البعد الحقيقي بين النقطتين المعلومتين  $(ا ر آ)$   
 $و (ب ر ت)$

و (ب و ت) المعلومات وضاع قائمته  $\text{ب} = \text{ط} = \text{ت} = \text{آ}$  أعني مساويا إلى المسقط  
الرأسي للمستقيم الواصل بين النقطتين وضاع القائمة الثاني وهو  $\text{ا} = \text{ك} = \text{ط} = \text{ل} =$   
 $\text{ا} = \text{ب} = \text{ع}$  أعني مساويا للفرق بين بعدي النقطتين المعلومات من المستوى الرأسي  
المقدرين ببعدى مسقطيهما الأفقيين عن خط الأرض

ومن هذه النتيجة تؤخذ قاعدة عمومية لأجل تعيين البعد الحقيقي بين نقطتين معلومتين  
بمساقطهما وهي أن يركب مثلث قائم لزاوية أحده ضلعي قائمته المسقط الأفقي للمستقيم  
الواصل بينهما وضلعه الثاني الفرق بين ارتفاعي النقطتين المذكورتين عن المستوى  
الأفقي المقدرين ببعدى مسقطيهما الرأسيين عن خط الأرض أو يركب مثلث قائم الزاوية  
بواسطة المسقط الرأسي للمستقيم الواصل بين النقطتين والفرق بين بعدي المسقطين  
الأفقيين للنقطتين المعلومات عن خط الأرض فكل من وترى المثلثين القائمي الزاوية  
المشتقين بهذه الكيفية يكون حقيقة للبعد الكائن بين النقطتين المفروضتين

بمسألة (طريقة ثانية لحل المسألة المتقدمة) إذا فرض أن النقطتين المعلومات هما  
(ا و أ) و (ب و ب) (شكل ٨ لوحة ٢) وكان المطلوب إيجاد حقيقة المستقيم المحدود  
(ا ب و آ ت) الواصل بينهما ما يقال أن هذا المستقيم صانع مع المستقيمين المسقطين  
أفقياً لنهايتيه ومع المسقط الأفقي ا ب شبه منحرف وحينئذ فيمكن إيجاد حقيقة ذلك  
المستقيم بتطبيقه على المستوى الأفقي للمسقط ولذلك يتوهم دوران شبه المنحرف المذكور  
يفرض ارتباط أضلاعه ببعضها وحفظ الزوايا الواقعة بينها حول المسقط الأفقي ا ب  
إلى أن ينطبق على المستوى الأفقي بحيث كان المستقيمان المسقطان أفقياً للنهايتين  
عموديين على المسقط الأفقي في الوضع الأصلي فلا يزالان عمادين عليه بعد الانطباق  
وحينئذ إذا أقيم العمود ب ب من نقطة ب على اتجاه المسقط الأفقي ا ب وأخذ  
عليه بعد ب ب مساويا إلى طول المستقيم المسقط أفقياً إلى نقطة (ب و ت) المقدر  
ببعده ه ثم أقيم عمود ا ا أيضا وأخذ عليه بعد ا ا مساويا إلى ب و وبعد ذلك  
وصل المستقيم ا ب كان هذا المستقيم هو منطبق المستقيم الفراغي على المستوى  
الأفقي واذن فهو حقيقة

ويمكن أيضا إيجاد حقيقة المستقيم (ا ب و آ ت) (شكل ٨ لوحة ٢) بواسطة تدوير  
شبه المنحرف المتكون منه ومن المستقيمين المسقطين رأسيا لنهايتيه ومن مسقطه الرأسي

أَن حول المسقط الرأسى المذكور الى ان ينطبق على المستوى الرأسى ومن بعد  
تطبيقه بكيفية مماثلة لكيفية التى أجريناها عند التطبيق على المستوى الافقى نجد  
ان حقيقة المستقيم عبارة عن البعد  $إ ب$

(تنبيه) اذا مد منطبق المستقيم على المستوى الافقى الذى هو مستقيم  $ب إ$  على استقامته  
يلزم ان يمر امتداده بالاثرا الافقى  $و$  للمستقيم الاصلى لان هذا الاثر هو نقطة من المستقيم  
الفراغى ثابتة اثناء حركته بسبب وجودها على محور الدوران فلا يزال المستقيم  
المذكور مازالها بعد الانطباق

وكذا اذا مد الانطباق  $ب إ$  على استقامته لزم ان يمر كما تقدم بالاثرا الرأسى  $ح$  للمستقيم  
الاصلى

بمسند وبالعكس اذا علم مستقيم غير محدود كالمستقيم  $(ب و د و ع)$   
(شكل ٨ لوحة ٢) ونقطة عليه كنقطة  $(ب و ت)$  وكان المطلوب إيجاد نقطة على  
هذا المستقيم مثل نقطة  $(ا و آ)$  بحيث يكون بعدها عن النقطة المعلومه  
 $(ب و ت)$  مساويا لقيمة معلومة رمزها  $م$  فلذلك يطبق المستقيم المعلوم على  
المستوى الافقى بموجب ما تقدم بأن يؤخذ البعد  $ب = ت ه$  ويوصل المستقيم  $ب و$   
الذى يكون هو منطبق المستقيم المعلوم ثم بعد ذلك تقطع على هذا المستقيم بالابتداء  
من نقطة  $ب$  مسافة مثل  $ب إ$  مساوية الى البعد المعلوم  $م$  فاذا توهمنا قيام المستقيم  
المنطبق  $ب و$  ورجوعه الى وضعه الاصلى رجعت معه نقطة  $إ$  الى نقطة  $ا$  بمورد على  
محور الدوران  $ب و$  وأخيرا بين المسقط الرأسى لهذه النقطة بأن يقام من مسقطها  
الافقى  $ا$  عمود على خط الارض ويمد حتى يتلاقى مع المسقط الرأسى للمستقيم فى نقطة مثل  
 $أ$  فتكون هى المسقط الرأسى للنقطة المطلوب إيجادها

بمسند المستقيمان المتوازيان فى الفراغ تكون مساقطهما المتحددة الاسم متوازية  
مثلا اذا فرض ان المستقيمين الفراغيين  $ا ب$  ,  $ح د$  (شكل ٩ لوحة ٢) متوازيان  
أقول ان مسقطيهما الافقيين  $آ ت$  ,  $ح و$  متوازيان ومسقطيهما الرأسين  $أ ت$  ,  $ح و$   
متوازيان أيضا

وذلك لانه لما كان المستقيمان الفراغيان  $ا ب$  ,  $ح د$  متوازيين فالمستويان  
 $ا ب ت آ$  ,  $ح د و$  المسقطان لهما افقيا يكونان متوازيين وبناء على ذلك يكون  
خطا

خطات تقاطع هذين المستويين بالمستوى الأفقي اللذان هما  $\alpha$  و  $\beta$  أعني  
المستقيمين الأفقيين للمستقيمين الفراغيين متوازيين أيضا وبمثل ذلك يبرهن على أن  
مستقيهما الرأسين  $\alpha'$  و  $\beta'$  يكونان متوازيين  
وبالعكس إذا كان المستقيمان الأفقيان  $\alpha$  و  $\beta$  (شكل ٩ لوحة ٢)  
للمستقيمين فراغيين متوازيين وكان مستقيهما الرأسين  $\alpha'$  و  $\beta'$  متوازيين أيضا  
يلزم بناء على ما سبق في برهان الحالة الأولى أن يكون المستقيمان الفراغيان  $\alpha$  و  $\beta$   
متوازيين

وبمقتضى هذه النظرية وعكسها يمكن حل المسألة الثانية وهي  
المعلوم مستقيم مثل (اب و  $\alpha$ ) (شكل ١٠ لوحة ٢) ونقطة خارجة عنه مثل (د و  $\beta$ )  
والمطلوب مد مستقيم من هذه النقطة يكون موازيا إلى المستقيم المعلوم لذلك يكفي أن يمرر  
من نقطة د التي هي المسقط الأفقي للنقطة المعلومه مستقيم مثل د ه موازيا إلى اب  
فيكون مستقيم د ه مسقطا أفقيا للمستقيم المطلوب وأيضا يد من نقطة د مستقيم  
مثل د ه موازيا إلى  $\alpha$  فيكون هو المسقط الرأسى للمستقيم المطلوب أيضا فإذا أريد  
إيجاد أثرى المستقيم (د ه و  $\beta'$ ) الذي تعين بهذه الصورة يجري العمل بمثل ما تقدم  
في بيان ١

بيان ٣ (تعين المستويات بحسب شروط معاليمها) المعلوم مستقيمان والمطلوب إيجاد  
المستوى المار بهما وانقبه قبل الشروع في حل هذه المسألة أولا على أن المستوي يبين  
في الهندسة الوصفية بأثره وأثر المستوي هما خطا تقاطعه بمستويي المسقط نقط  
تقاطعه بالمستوي الأفقي يسمى أثره الأفقي وخط تقاطعه بالمستوي الرأسى يسمى أثره  
الرأسى

ولا يخلو الحال عن أن يكون المستوى الفراغى إمامتلاقيا مع خط الأرض وأما موازيا له  
فإذا كان المستوى متلاقيا مع خط الأرض لزم دائما أن تكون نقطة تلاقيهما موجودة  
على كل من أثره الأفقي والرأسى وهذا يدل على أنه يلزم في هذه الحالة أن يكون أثرا  
المستوي متلاقين في نقطة واحدة من خط الأرض وأما إذا كان المستوى المعلوم  
موازيا إلى خط الأرض لزم أن يكون أثره موازيا لخط الأرض أيضا  
وثانيا على أنه إذا كان مستقيم فراغى موجودا داخل مستوي فراغى أيضا لزم أن يكون أثرا  
هذا المستقيم موجودين على أثرى المستوى كل على نظيره وهذا أمر بداهى إذ لا يتأفى

للمستقيم المذکورهما امتدان يخرج عن المستوى الموحد هو فيه  
وانرجع الآن لحل المسئلة المذکور منطوقها في اول هذا البند فنقول لاشك ان  
المستقيمين المعلومين اللذين يراد تقرير المستوى المطلوب بهما اما ان يكونا متقاطعين  
أو متوازيين

فاذا اعتبرنا الحالة الاولى وفرض ان المستقيمين المتقاطعين المعلومين هما (ا ب و آ ت)  
(ح د و ح د) (شكل ١١ لوحة ٣) يقال يلزم التحقق أولا بما اذا كان المستقيمان  
المذکوران متقاطعين في الفراغ أم لا واعرفه ذلك بتطرق في نقطة تقاطع مسقطيهما  
الافقيين وهي ه ونقطة تقاطع مسقطيهما الرأسيتين وهي و فان كانتا على عمود واحد  
على خط الارض كما هو مفروض في شكل ١١ علم من ذلك ان مستقيمي (ا ب و آ ت)  
(ح د و ح د) متقاطعان وان كانتا بخلاف ذلك علم ان المستقيمين المذکورين غير  
موجودين في مستوى واحد وبعد التحقق من تقاطع المستقيمين المذکورين في الفراغ  
بواسطة الاختبار المتقدم يكفي لتعيين اثرى المستوى السار بهما أن يقال حيث ان  
المستوى المطلوب ايجاده مشتمل على المستقيمين المعلومين فبناء على التنبيه الثاني المتقدم  
تكون آثارهما موحدة على أثره ويلزم حينئذ البحث عن أثرى كل من المستقيمين  
المذکورين بمقتضى ما تقدم في بحثنا فنجد أن الاثر الافقي للمستقيم (ا ب و آ ت) هو ا  
وأثره الرأسى ت وان الاثر الافقي للمستقيم (ح د و ح د) هو ح وأثره الرأسى د فاذا  
وصل بين الاثرين الافقيين ا ح بمستقيم د ا ثم بين الاثرين الرأسيتين ت د بمستقيم  
ت د كان المستقيمان د ا و ت د كتابة عن أثرى المستوى المار بالمستقيمين (ا ب و آ ت)  
(ح د و ح د) المعلومين ولاجل تحقيق الرسم يلزم بناء على ما تقر في التنبيه الاول أن  
بتقاطع كل من الاثرين د ا الافقى و ت الرأسى من المستوى المطلوب في نقطة  
واحدة مثل س على خط الارض

بمسئدة الحالة الثانية اذا كان المستقيمان المعلومان (ا ب و آ ت) و (ح د و ح د)  
(شكل ١٢ لوحة ٣) متوازيين لزم أن يكون مسقطاهما الافقيان ا ب و ح د  
متوازيين ومسقطاهما الرأسيان آ ت و ح د متوازيين أيضا كما في مسئدة ولتعيين  
أثرى المستوى السار بهما يبحث كما تقدم في الحالة الاولى عن أثرى كل من المستقيمين  
المذکورين ويمرر بالاثرين الافقيين ح ا و ا مستقيم مثل ح اس فيكون هو الاثر  
الافقى للمستوى وبالاثرين الرأسيتين ت د و ت مستقيم مثل د س فيكون هو الاثر

الرأسي للمستوى المذكور وبمقتضى ما تقدم يلزم ان يكون متقاطعا مع الاثر الافق في نقطة مثل س على خط الارض خ ض

(نتيجة) إذا كان المطلوب تمرير مستوي بثلاث نقط معلومة مثل (ع و ع) , (ه و ه) (م و م) (شكل ١١ لوحة ٣) يكفي لذلك ان يمرر بمستوي (ه و ه) و (ع و ع) مستقيم مثل (ع و ع) وأيضا يمرر بمستوي (ه و ه) و (م و م) مستقيم آخر مثل م و م فيكون قاطعا للمستقيم الاول في نقطة (ه و ه) وتؤول المسئلة حيلة الى كيفية تمرير مستوي بمستقيمين متقاطعين وبمقتضى ما تقدم يكون س ح هو المستوى المطلوب

(نتيجة ثانية) اذا كان المعلوم مستقيما مثل (اب و ا) (شكل ١٢ لوحة ٣) ونقطة خارجة عنه مثل (م و م) وريد تمرير مستوي بهما كفي لذلك ان يمرر من النقطة المذكورة مستقيم قاطع اواوا للمستقيم (اب و ا) المعلوم وليكن هذا الموازي هو المستقيم (حم و ح) فتؤول المسئلة الى تمرير مستوي بمستقيمين متوازيين فيكون بناء على ما تقدم المستوى س ح هو المستوى المطلوب به ٣٣ المعلوم مستوي مثل ع هك (شكل ١٣ لوحة ٣) ونقطة خارجة عنه مثل نقطة (م و م) والمطلوب م م من هذه النقطة مستوي مواز له

لذلك يقال من المعلوم ان اثرى المستوى المطلوب سيكونان موازيين الى اثرى المستوى المعلوم ع ه و هك كل لنظيره لان المستويين المتوازيين تكون آثارهما المتحدة الاسم متوازية وبناء عليه فاللازم لنا فقط هو إيجاد نقطة من كل اثر من اثرى المستوى المطلوب ولذلك يمرر من النقطة المعلومة (م و م) مستقيم مواز للمستوى ع هك فيؤخذ أولا مستقيم مثل (اب و ا) داخل المستوى المذكور بأن يؤخذ اثره ا ر ت على اثرى المستوى ع هك وبعد ذلك يمد من نقطة (م و م) مستقيم (م م و م م) مواز الى مستقيم (اب و ا) فيكون المستقيم الاول موجودا بأكماله في المستوى المطلوب واذن يلزم البحث عن اثر به وليكونا ح و ز ويمد منهما مستقيمان موازيان الى اثرى المستوى المعلوم فيتعين مستوي مثل س ح هو المستوى المطلوب

بسط ٣٤ ويمكن لأجل السهولة والوفى في الرسم تعويض المستقيم الذي أخذ في الحالة الاولى داخل المستوى المعلوم في وضع حيثما اتفق بأحد اثرى المستوى المعلوم

\* (٢٢) \*

مثلاً إذا أردنا من نقطة (م و م) (شكل ١٤ لوحة ٣) مذهباً مستوياً موازاً إلى المستوى ع هـ ك معلوم يمرر بالنقطة (م و م) مستقيماً موازاً إلى الاثر الأفقي ك هـ من المستوى المعلوم فيكون مسقطه مستقيماً مثل م ب موازياً إلى الاثر الأفقي ك هـ ومسقطه الرأسى مستقيماً مثل م ب موازياً إلى خط الأرض لأن المستقيم المار في الفراغ بنقطة (م و م) والموازي إلى الاثر الأفقي ك هـ يكون موازياً إلى المستوى الأفقي للمسقط وعلى هذا يكون الاثر الأفقي لهذا المستقيم معدوماً ما أثره الرأسى ب فبتعين بمقتضى مبدأ ٢٢ فإذ لم نجد من نقطة ب مستقيماً مثل ب د موازياً إلى ع هـ ثم من نقطة تقابله بخط الأرض وهى ل م مستقيماً ل ح موازياً إلى ك هـ حدث مستوياً مثل ب د هو المستوى المطلوب

ويمكن أيضاً أن نجد من النقطة المعلوم (م و م) مستقيماً مثل (ح م و ح م) موازاً للاثر الرأسى من المستوى بدلاً عن الموازى إلى أثره الأفقي ويكون العمل عين ما تقدم

بمبدأ ٣ من المهم أن نلاحظ أننا لم نتر في شكل (١٣ و ١٤) أن المستويين المتوازيين هما وجود حقيقي في الفراغ لأن ذلك كان يستلزم عدم ظهور المستوى ك د (شكل ١٣ لوحة ٣) لاختلافه تحت المستوى ع هـ وعليه فكان يجب تنقيط اثرى المستوى الاول بمقتضى الاصطلاح المقرر بمبدأ ٢٢ لكن حيث أن ذلك مما يكثر عدد الخطوط النقطية ويعطل الذهن عن تمييز الاجزاء من اثرات المستويات التى تكون امام او خلف مستوي المسقط فلذا يعتبر دائماً أن الموجود من المستوى هو اثره فقط وفي بعض الاحيان يعتبر للمستوى الفراغى وجود حقيقى لكن عندما يعتبر ذلك فلانهم مل في أخبار الطالب بذلك للتنوير عليه وعدم الوقوع في الخطأ

بمبدأ ٣٦ يمكن بواسطة الاعتبار المقررة في مبدأ ٣٣ حل المسئلة الآتية وهى المعلوم المسقط الأفقى اب (شكل ١٥ لوحة ٣) مستقيماً مجهول المسقط الرأسى لكنه محقق الوجود داخل مستو فراغى معلوم ك المستوى م هـ ك والمطلوب تعيين مسقطه الرأسى المجهول فلذلك يقال لاشك أننا إذا مددنا المسقط الأفقى المعلوم حتى تلاقى مع خط الأرض في نقطة ولتكن ا كانت هذه النقطة هى المسقط الأفقى للاثر الرأسى من المستقيم الذى يراد تعيين مسقطه الرأسى وحيث أن هـ هذا الاثر موجوداً أيضاً على الاثر الرأسى م هـ

من المستوى المعلوم م هـ ك فيكون حينئذ نقطة آ التي هي نقطة تقابل الاثر م هـ مع العمود ا ا المقام من نقطة ا على خط الارض خ ض اما الاثر الافقي للمستقيم المذكور فانه يوجد على كل من مسقطه الافقي اب المعلوم والاثر الافقي هـ ك للمستوى الشامل له وعلى ذلك فهو نقطة تقابلهما ب وبناء على ما ذكره صار المستقيم معين الاثرين وهما آ د ب فيقتضى بسند يمكن تعيين مسقطه الرأسى آ ت الذى كان مجهولا فاذا كان المعلوم من المستقيم هو مسقطه الرأسى آ ت (شكل ١٥ لوحة ٣٤) وأريد تعيين مسقطه الافقي المجهول أجرى العمل مثل ما تقدم في الحالة الاولى

فاذا فرض أن المسقط الافقي ا ب المعلوم (شكل ١٦ لوحة ٣٤) مواز الى الاثر الافقي هـ ك من المستوى المعلوم م هـ ك يعين الاثر الرأسى ت من المستقيم المذكور كما تقدم وأما أثره الافقي فكونه معدوما بسبب عدم تقاطع خط ب ا بخط هـ ك يعلم أن المستقيم الفراغى المطلوب مواز الى المستوى الافقي للمسقط ويكون مسقطه الرأسى بناء على ذلك عبارة عن المستقيم ت آ الموازى الى خط الارض خ ض

وبمثل ذلك يرى أنه اذا كان المسقط الافقي المعلوم هو مستقيم د و الموازى الى خ ض (شكل ١٦ لوحة ٣٤) دل ذلك على أن المستقيم فى الفراغ مواز الى المستوى الرأسى للمسقط ويكون حينئذ مسقطه على هذا المستوى الاخير عبارة عن المستقيم د و الموازى الى هم بسند وهماك أيضا مسألة مشابهة للمسئلة المتقدمة وهى

المعلوم المسقط الافقي ح (شكل ١٥ لوحة ٣٤) لنقطة محقق وجودها فى مستوى معلوم مثل م هـ ك والمطلوب تعيين مسقطها الرأسى فحل هذه المسئلة بتدوين نقطة ح المعلومه مستقيم حيثما اتفق مثل ا ح ب ويعتبر مسقطا افقيا للمستقيم موجود فى المستوى المعلوم م هـ ك ثم يبحث بمقتضى المسئلة السابقة عن المسقط الرأسى آ ت لهذا المستقيم وحينئذ لم يبق سوى أن يبحث عن المسقط الرأسى للنقطة على المستقيم آ ت الذى هو المسقط الرأسى لمستقيم مار بها ولذلك ينزل منها عمود على خط الارض ويمد حتى يتلاقى مع آ ت فى نقطة مثل د فتكون هى المسقط الرأسى المطلوب ويمكن أيضا تعيين المسقط لافقى ح للنقطة اذا كان مجهولا وكان المعلوم هو مسقطها الرأسى د

نتبيه عوضا عن أن يؤخذ المستقيم المساعد ا ح ب (شكل ١٥ لوحة ٣٤) المار بنقطة ح فى اتجاه حيثما اتفق الاحسن والاسهل ان يمرر بها مستقيم مواز للاثر الافقي يـ ك من المستوى أو مستقيم مواز لخط الارض ومثال ذلك مبين فى (شكل ١٦ لوحة ٣٤)



فالتظر اليه غان عن التطويل

بمسد (تقاطع المستويات مع بعضها) المطلوب إيجاد خط تقاطع مستويين معلومين وهو على جملة حالات بحسب أوضاع المستويين المتقاطعين  
الحالة الاولى أن تكون آثار المستويين المعلومين متقاطعة معني داخل حدود الرسم كما إذا أريد مثلا إيجاد خط تقاطع المستوي م هـ ك (شكل ١٧ لوحة ٤) بالمستوي س ع هـ فذلك يقال بما أن خط التقاطع المطلوب موجود في كل من المستويين م هـ ك و س ع هـ فيكون أثره موجودين على اثرى كل منهما بمعنى أن أثره الأفقي يكون عبارة عن نقطة أ التي هي نقطة تقابل أثريهما الأفقيين هـ ك و س ع هـ وأثره الرأسى يكون عبارة عن نقطة ب أيضا وحيث علم أن خط التقاطع يمرل تعيين مسقطيه وهما اب و آ ت يقتضى به مسد

بمسد الحالة الثانية أن يكون اتسان من آثار المستويين متقاطعين معا والآخران متوازيين كالمستويين م هـ ك و س ع هـ (شكل ١٨ لوحة ٤) بأن كان اثرهما المتوازيان هما هـ ك و س ع هـ الأفقيان فيقال من كون الاثرين المذكورين غير متقاطعين يعلم أن خط التقاطع مستقيم أفقى أعني موازيا الى المستوي الأفقى للمسقط حيث لا أثر له على المستوي المذكور وبناء على ذلك يكون المسقط الرأسى للخط المذكور هو المستقيم آ ت الموازى لخط الارض والممدود من نقطة آ التي هي أثر الرأسى وذلك بمقتضى ما قبل في الحالة الاولى وأما المسقط الأفقى فيتعين بأن ينزل من آ عمودا مثل آ آ على خط الارض ومن نقطة تقابلها وهي ا يرسم المستقيم اب موازيا للأثرين الأفقيين هـ ك و س ع هـ من المستويين المعلومين فيكون اب هو المسقط الأفقى للفاصل المشترك المطلوب ومثل ذلك يعمل في حالة ما يكون الاثران الرأسيان من المستويين المعلومين هما المتوازيان

بمسد الحالة الثالثة أن يكون المطلوب إيجاد خط تقاطع مستويين متوازيين مثل م هـ ك (شكل ١٩ لوحة ٤) بمستويين مواز لا حد مستويي المسقط كالمستوي س ع هـ الموازى الى المستوي الأفقى مثلا فذلك يقال أن خط التقاطع في هذه الحالة مستقيم أفقى لا يكون موجودا في المستوي س ع هـ الموازى للمستوي الأفقى فلهذا وكون خط التقاطع المذكور موجودا أيضا في المستوي م هـ ك هو حيث يندم واراثره الأفقى هـ ك أعني احدافيهاته وبناء على ذلك يكون المسقط الرأسى لخط التقاطع المذكور عبارة عن

المستقيم

المستقيم آس الموازي لخط الارض والمدود من نقطة آ أعني منطبقا على الاثر  
الرأسي ع ص من المستوى القاطع الموازي للمستوى الافقي للسقط وأمامه سقطه الافقي  
فهو والمستقيم اب الموازي الى الاثر هـ ك ومثل ذلك يجري في حالة ما يكون احد المستويين  
المتقاطعين موازيا الى المستوى الرأسى عوضا عن ان كان موازيا الى الافقي

باعد الحالة الرابعة أن تكون اثرات المستويين المتقاطعين متقاطعة مثني لكن  
في خارج حدود الرسم وذلك كحالة المستويين م هـ ك و ص ع ص (شكل ٢٠ لوحة ٤)  
فلتعيين خط التقاطع في هذه الحالة يقال يلزم أن يعين منه نقطتان بدلا عن نقطتي  
الاثرين اللتين وقعتا خارج حدود الرسم وللوصول الى ذلك نقطع المستويين المعلومين  
م هـ ك و ص ع ص بمستوي مساعد أول اتجاهه اختياري فيقطعهما في مستقيمين  
وهذان المستقيمان يتقاطعان في نقطة فتكون تلك النقطة بالضرورة نقطة من خط  
تقاطع المستويين الاصلين ثم نقطعهما بمستوي مساعد آخر يفعل بهما كما فعل المستوى  
الاول وتعين به نقطة ثانية من خط تقاطع المستويين الاصلين أيضا فاذا وصل بين  
النقطة الاولى والثانية بمستقيم كان هو خط التقاطع المطلوب

ولاجل السهولة يؤخذ المستويان المساعدان موازيين لاحد مستويي المسقط وليكن  
احدهما هو المستوى لآ الموازي الى المستوى الافقي مثلا فيقطع المستوى م هـ ك  
في مستقيم ينسقط رأسيه على نفس الاثر لآ وأفقيبا على المستقيم لآ الموازي الى  
هـ ك (انظر به ٤٤) وكذا يقطع المستوى الثاني ص ع ص في مستقيم آخر مثل  
(لآ و لآ ب) ونقطة ب التي هي نقطة تقابل المسقطين الافقيين لآ ب و لآ ب تكون  
هي المسقط الافقي لنقطة من خط التقاطع المطلوب مسقطها الرأسى نقطة ب تقابل  
العمود المقام من المسقط الافقي ب على خط الارض مع المستقيم لآ الذي هو مسقط  
رأسى مشترك لكل من خطي تقاطع المستوي لآ مع مستويي م هـ ك و ص ع ص  
ولاجل ايجاد نقطة أخرى من خط التقاطع المطلوب يستعان بمستوي ثان مساعد كالمستوى  
ط ح الافقي أيضا فيقطع مستوي م هـ ك في المستقيم (ط ح و ط ا) ومستوي  
ص ع ص في المستقيم (ع ح و ح ا) الذي يعين به تقاطعه مع المستقيم الاول نقطة مثل  
(ا و آ) فتكون نقطة ثانية من خط التقاطع المطلوب الذي يكون بناء على ذلك  
عبارة عن المستقيم (اب و آ ب) بحيث اذا مد مسقطه الافقي اب مربطة نقطة تقاطع

الاثرين الافقيين هـ و ع صه واذا تمسقطه الرأسى آت مربة نقطة تقاطع  
الاثرين الرأسيين م ه و سه وهذا امر سهل التصور ولا يحتاج الى زيادة التطويل  
\*(تنبيه)\* قد أخذت المستويات المساعدة هنا موازية للمستوى الافقى من مستوى  
المسقط لكنه كان يمكن أخذها موازية الى المستوى الرأسى والعمل بعينه

بـ ٤٤ الحالة الخامسة وهى التى تكون فيها اثرات المستويين المتقاطعين متوازية  
لا يخفى ان كل مستويين اثرائهما موازية يكونان على العموم متوازيين مالم تكن  
اثرائهما المتوازية موازية الى خط الارض ومنعكسة الترتيب لان كل مستويين بهذه  
الصورة يتقاطعان فى مستقيم مواز الى خط الارض المذكور

ولنفرض مستويين من هذا القبيل كالمستويين اللذين اثرا أحدهما هـ و م هـ والمفروض  
ر س هـ (شكل ١٢ لوحة ٤) واثرا المستوى الثانى هما م هـ و م هـ والمفروض  
انها جميعا موازية وموازية الى خط الارض ومنعكسة الترتيب بالنسبة له بمعنى ان  
المستوى الذى اثره الافقى س هـ الاقرب من غيره بالنسبة لخط الارض يكون اثره  
الرأسى هو س هـ الابعد بالنسبة لخط الارض المذكور والعكس بالعكس وقد اعتبرنا  
فى (الشكل ١٢ لوحة ٤) ان المستويين المعلومين لهما وجود حقيقى فى الفراغ ولذا  
قد التزمنا بتقريب الاثرين س هـ و م هـ المنجأين ورائهما طبقا للاصطلاح المقرر  
فى بـ ٤٥

فلايجاد خط تقاطع هذين المستويين يقطعان بمستوى مساعد حيثما اتفق مثل ط ع  
الذى يقطع المستوى (س هـ و س هـ) فى المستقيم (د ر و د ر) والمستوى  
(م هـ و م هـ) فى المستقيم (ع ف و ع ف) وهذا المستقيم الاخير متقاطع مع  
المستقيم الاول فى نقطة (ظ و ظ) التى تكون حيث تلتقي نقطة من خط التقاطع  
المطلوب وحيث ذكرنا فى أوائل هذه المسئلة ان خط التقاطع مواز لخط الارض فيكفى  
حينئذ لايجاد ان يمد من نقطة (ظ و ظ) مستقيم مثل (ظ و ظ و ظ و ظ) مواز  
لخط الارض فيكون هو خط التقاطع المطلوب

ويمكن ايضا ان يؤخذ عوضا عن المستوى ط ع المأخوذ حيثما اتفق مستوى قطاع  
عمودى على خط الارض غ ض مثل المستوى غ و ك (شكل ١٢ لوحة ٤) الذى  
يكون خط تقاطعه بمستوى المسقط الاصلين عبارة عن المستقيمين غ و غ و ك  
الكائنين على استقامة واحدة وهذا المستوى يقطع الاثرين الرأسيين للمستويين

المعلومين في نقطتين مثل  $\gamma$  و  $\delta$  فاذا أدركنا المستوى المساعد المذکور حول أثره الأفقي  $\gamma\delta$  الى أن ينطبق على المستوى الأفقي للسقط انطبق أثره الرأسى  $\gamma\delta$  على خط الأرض  $\gamma\delta$  وانطبقت معه نقطتا  $\gamma$  و  $\delta$  اللتان هما نقطتا تقابل مستوى القطاع  $\gamma\delta$  مع الاثرين الرأسين  $\gamma\delta$  و  $\delta\gamma$  للمستويين الاصلين أو هما الاثران الرأسيان لخطى تقاطع مستوى القطاع بالمستويين الاصلين بأن يرسمهما قوسى  $\gamma\delta$  و  $\delta\gamma$  في المستوى الرأسى ويأتيا في  $\gamma$  و  $\delta$  من خط الأرض وعلى هذا يكون  $\gamma\delta$  و  $\delta\gamma$  منطبقين لخطى تقاطع المستوى  $\gamma\delta$  بالمستويين الاصلين على المستوى الأفقي للسقط وان يكون الخطين المذکورين متقاطعين في نقطة  $\gamma$  تكون هذه النقطة نقطة من خط التقاطع المطلوب فاذا اسقطت نقطة  $\gamma$  افقيا في نقطة  $\gamma$  علم ان المسقط الأفقى لخط التقاطع المطلوب هو المستقيم  $\gamma\delta$  الموازى الى  $\gamma\delta$  وايضا اذا رفعنا مستوى القطاع الى وضعه الاصلى ان سقطت نقطة  $\gamma$  رأسيا على نقطة  $\gamma$  وصار المستقيم  $\gamma\delta$  و الموازى الى خط الأرض مسقطا رأسيا لخط تقاطع المستويين المعلومين

بـ ٤٣ الحالة السادسة اذا كانت اثرات المستويين المتقاطعين متلاقية بجميعها في نقطة واحدة من خط الأرض كانت هذه النقطة بالضرورة نقطة من خط تقاطع المستويين المعلومين وعلى ذلك فلا يلزم البحث سوى عن نقطة ثانية منه ولذا نستعمل احدى الطريقتين المدونتين في البند السابق وقد اكتفينا بذلك بهذه المحوطات من باب التذكير والمساعدة للتأمل وعلى المعلم أن يكافهم بحل هذه المسئلة وعمل الشكل اللازم لما تدريناهم على تطبيق القاعدتين المذكورتين في بـ ٤٢ على حالها ولا يتحقق العلم من تمكن تلامذته في تصورهم للقواعد الماضية أو عدمه

بـ ٤٤ طريقة اخرى لحل المسئلة المذكورة في الحالة الرابعة بـ ٤٢

قد يكون الحل المستعمل (في بـ ٤٢ حالة الرابعة) غير كاف في بعض الاحيان لايجاد خط تقاطع المستويين مثلا اذا فرض ان المطلوب ايجاد خط تقاطع مستويين مثل  $\gamma\delta$  و  $\delta\gamma$  (شكل ٢٢ لوجه ٥) نجد انه بموجب طريقة الحل المذكورة كان يلزم قطع المستويين المذكورين بمستوا فى كالمستوى  $\gamma\delta$  فيقطعهم في المستقيمين المنسطين افقيا على  $\gamma\delta$  و  $\delta\gamma$  وتكون نقطة تقاطع هذين المنسطين مسقطا افقيا لنقطة من خط التقاطع . . . الخ . . . ويمكن من حيث انه من الجائز ان المنسطين

الافقيين لمستقيي التقاطع لا يتقاطعان كاثرات المستويين الا في نقطة موحودة خارج حدود الرسم كما حصل ذلك في المستويين  $ad$  و  $be$  وغيرهما مما هو موجود في (شكل ٢٢ لوحة ٥) فثبت ان يكون المحل بهذه الكيفية غير ممكن في هذا الوضع وما يماثله ولذا التزمت بأن اذكر لذلك طريقة كافية يمكن استعمالها دائماً وهي الآتية

اذا أريد إيجاد خط تقاطع المستويين  $م هـ ك$  و  $س ع ص$  (شكل ٢٣ لوحة ٥) اللذين اثراتهما متقاطعة بعيدا جدا عن حدود الرسم يقال لاجل إيجاد المسقط الرأسى لمخطط التقاطع نقط المستويين المعلومين  $م هـ ك$  و  $س ع ص$  بمساعدة ما يربط خط الارض  $غ ض$  ومائل على المستوى الافقى بزواوية صغيرة جدا لانه اذا مرر مستوي بهذه الصورة صار من المحقق انه يقطع المستويين المعلومين في مستقيمين قريبين جدا من المستوى الافقى وعليه فيتحقق تقاطع مسقطيهما الرأسين قريباً جداً من خط الارض أى داخل حدود الرسم ولتحديد هذا المستوى المساعد تؤخذ نقطة مثل (١ و آ) حيثما اتفق لكنهما قريبة جداً من المستوى الافقى ويتوهم مرور المستوى المذكور بها وبخط الارض  $غ ض$  ثم تبحث عن خطى تقاطع هذا المستوى بمستويي  $م هـ ك$  و  $س ع ص$  ولذلك يمرر نقطة (١ و آ) مستوياً مساعداً موازاً للمستوى الرأسى كالمستوى الذى اثره الافقى وهو  $هـ او$  ماراً بالمسقط الافقى  $ا$  للنقطة وموازاً لخط الارض فهذا المستوى يقطع المستوى  $م هـ ك$  في مستقيم مثل (هـ او و هـ هـ) ويقطع المستوى المساعد الاول أعنى المار بخط الارض وبالنقطة (١ و آ) في مستقيم موازاً لخط الارض كالمستقيم (هـ او و لا آ لا) وهذا المستقيم يتقاطع مع المستقيم الاول في نقطة تدعى نقطة رأسى في نقطة  $ل$  التى هي نقطة تقابل مسقطيهما الرأسين وتكون تلك النقطة احدى نقط خط تقاطع المستوي  $م هـ ك$  بالمستوى  $غ ض$  (١ و آ) وعليه يكون خط التقاطع المذكور منسقطاً رأسياً على خط  $هـ ل$  الغبر المحدود ثم يبحث بمثل ذلك عن خط تقاطع المستوى  $غ ض$  (١ و آ) المساعد مع المستوى الايسر  $س ع ص$  فيوجد انه هو المنسقط رأسياً على  $ع ل$  الذى يقطع المستقيم الاول  $هـ ل$  في نقطة مثل نقطة  $ح$  التى تكون احدى نقط المسقط الرأسى لمخطط تقاطع المستويين الاصلين  $م هـ ك$  و  $س ع ص$  ومن المحقق ان نقطة  $ح$  لا بد وان تقع داخل حدود الرسم حيث

أخذ المستوى المساعد { غ من ( ١ د آ ) } ماثلاً على المستوى الأفقي بميل صغير جداً ثم لاجل إيجاد نقطة ثانية من المسقط الرأسى لمخطط التقاطع خلاف نقطة ج يمر رأياً أيضاً مستوياً مساعد آخر بمخطط الأرض وبه نقطة أخرى ك نقطة ( ب د ت ) أعلى أو أوطى بقليل من النقطة الأولى ( ١ د آ ) التى مرر بها المستوى المساعد الأول وبه كذلك يبحث عن خطى تقاطع المستوى المساعد الجديد الذى هو { غ من ( ب د ت ) } بالمستويين الأصليين كما يبحث عن خطى تقاطعهما بالمستوى المساعد الأول فيوجدان المسقطين الرأسيين لهما عبارة عن مستقيمين و ف ط ر ع نقط التقاطعين فى نقطة ط التى تكون كما تقدم نقطة ثانية من المسقط الرأسى لمخطط التقاطع المطلوب فاذا وصل منها إلى النقطة التى وجدت من قبل بمستقيم مثل ط ج كان هو المسقط الرأسى لمخطط تقاطع المستويين م ه ك ر سه ع صه الأصليين بحيث لو مد ح ط على استقامته لتقاطع مع الاثرين هم ر ع س فى نقطة واحدة

وأما المسقط الأفقى لمخطط التقاطع فإنه يتعين كما عين المسقط الرأسى بأن تؤخذ المستويات المساعدة مارة بمحط الأرض أيضاً ومائلة على المستوى الرأسى للمسقط بزوايا صغيرة جداً وذلك كالمستويين { غ من ( ح ر خ ) } و { غ من ( د ر ذ ) } ويجرى عليها كما أجرى على أمثالهما فيحصل المسقط الأفقى لمخطط التقاطع المطلوب الذى يلزم أن يتقابل مع ه ك ر ع صه فى نقطة واحدة وفى التأمل فى الشكل ما يغنى عن التطويل فى الشرح

ب ٤٥ المطلوب إيجاد نقطة تقاطع ثلاثة مستويات معلومة مع بعضها لنفرض مثلاً ان الثلاثة مستويات معلومة هى م ه ك ر سه ع صه و ح ط ع (شكل ٢٤ لوحة ٥) ويراد إيجاد نقطة تقاطعها مع بعضها لذلك يبحث عن خطى تقاطع احد المستويات المذكورة ويمكن م ه ك مع المستويين الآخرين سه ع صه و ح ط ع فيجد هما بمقتضى ما تقدم فى ب ٣٨ عبارة عن المستقيمين ( اب د آ ت ) و ( ح د ر خ ذ ) وعلى هذا تكون نقطة تقاطع هذين المستقيمين وهى ( ه د هـ ) نقطة تقاطع المستويات الثلاثة المعلومة وهذا أمر بديهي اذ أن هذه النقطة هى المشتركة وحدها بين كل من الثلاثة المستويات المذكورة

ب ٤٦ المطلوب إيجاد نقطة تقابل مستقيم مثل ( ا ب د آ ت ) (شكل ٢٥ لوحة ٥)

بمستوى معلوم كالستوى م هـ ك

لذلك يمرر بالمستقيم (ا ب د آت) مستويًا اتفق قاطع للمستوى المعلوم ويبحث  
عن خط تقاطعهما ما بينهما من حيث ان خط التقاطع المذكور يلزم ان يكون  
بالضرورة مارا بالنقطة المطلوبة فتكون هي نقطة تقابله بالمستقيم المعلوم (ا ب د آت)  
ولاجل تمرير المستوى القاطع بالمستقيم المعلوم (ا ب د آت) فبحث عن أنثى المستقيم  
المذكور بمقتضى مبدأ فوجد ان أنثى الرأسى نقطة ت وأنثى الافقى نقطة ح وحيث  
ان أنثى المستوى الذى يراد تمريره يلزم ان يكونا مابين بأنثى المستقيم المعلوم اللذين  
هما ح د ر ت فيمد من الاثر الافقى ح مستقيم حيثما اتفق مثل ح ع صه ويعتبر أنثى  
افقى للمستوى المطلوب ثم يوصل من نقطة ع الى الاثر الرأسى ت بمستقيم مثل ع ت سه  
فيكون هو الاثر الرأسى للمستوى المذكور وحيث نبحث عن خط تقاطع هذا المستوى  
الجديد مع ع صه بالمستوى م هـ ك المعلوم فيوجد انه كناية عن المستقيم (هـ و د هـ و)  
وهذا المستقيم متلاق مع المستقيم (ا ب د آت) فى نقطة (ط د ط) التى تكون هي  
نقطة تقابل المستقيم المعلوم بالمستوى م هـ ك المعلوم أيضا ولجل زيادة الايضاح  
قد اعتبرنا ان المستوى م هـ ك له وجود حقيقى فى الفراغ فصار الجزء (ا ط د آط)  
هو الجزء المشاهد فقط من المستقيم الكلى (ا ب د آت) لكونه فوق المستوى م هـ ك  
ولذا قد بيناه بخطوط كاملة واما الجزء الذى تحت نقطة (ط د ط) فلكونه مخبأ  
بالمستوى م هـ ك قد رسم نقطيا بحسب الاصطلاح الذى اتفقنا عليه فيما تقدم بمبدأ  
ويمكن أيضا ان يمرر بالمستقيم المعلوم المستوى المسقط له افقيا وضاع ان يمرر به مستوي  
حيثما اتفق وبيان ذلك موضح فى (شكل ٢٦ لوحة ٦) وطريقته هي ان يمرر  
بالمستقيم المعلوم (ا ب د آت) المستوى ا ب ت المسقط له افقيا الذى ينطبق  
بالضرورة أنثى الافقى على المسقط الافقى ا ب من المستقيم المعلوم وأنثى الرأسى ت  
يكون عموديا على خط الارض فاذا بحث بعد ذلك عن خط تقاطع هذا المستوى المسقط  
ا ب ت بالمستوى المعلوم م هـ ك وجد ان خط التقاطع المذكور منسقط افقيا على  
د ب ورأسيا على د ت الذى يقطع المسقط الرأسى للمستقيم المعلوم وهو آ ا ح فى نقطة  
ط فتكون هذه النقطة مسقطا رأسى النقطة التقابل المطلوبة فيبحث عن مسقطها  
الافقى ط بمقتضى ما تقدم وقد اعتبرنا فى رسم (الشكل ٢٦ لوحة ٦) ان  
المستوى م هـ ك موجود فى الفراغ وبيننا الظاهر والمخبأ من المستقيم المعلوم كلاهما

يليق به كما فعلنا في المحل الاول لهذه المسئلة  
وأخيرا يمكن ان يمرر بالمستقيم المعلوم المستوى المسقط له رأسيا ويكون العمل مشابها  
بالكتابة لما تقدم في حالة ما اذا مرر به المستوى المسقط له أفقيا انظر (شكل ٢٦ لوحة ٦)  
تجدد العمل واحدا

بـ ٤٧ (في المساقط المساعدة) من المعلوم أنه حينما يكون المستوى المسقط أفقيا المستقيم  
معموديا على خط الارض يكون هذا المستوى بالضرورة عموديا أيضا على المستوى  
الرأسي للمسقط أعني يكون هو المستوى المسقط رأسيا للمستقيم المعلوم كما أنه مسقط له  
أفقيا وعلى هذا يكون أن هذا المستوى على مستويي المسقط موجودين على مستقيم  
واحد عمودي على خط الارض هو عبارة عن مجموع مسقطي المستقيم الفراغي الاصلي  
على مستويي المسقط المذكورين وقد تقدم في بناء ان كل مسقطين بهذه الصورة  
هما غير كافيين لتعيين وضع المستقيم الفراغي المبين به. هـ لان المستقيم الفراغي يمكنه  
ان يأخذ عدة أوضاع مختلفة داخل المستوى العمودي على خط الارض المسار بالمسقطين  
المذكورين مع بقائهما مسقطين له في أي وضع أخذه داخل المستوى المذكور  
نعم انه يمكن تحديد وضع المستقيم الفراغي في مثل هـ هذه الحالة بمعلومية مساقط نقطتين  
من نقطه لكن تكون هذه الطريقة غير مطابقة ولا موافقة لعمليات الهندسة الوصفية  
مباشرة بل بواسطة وزد على ذلك انه عندما يكون المعلوم عدة مستقيمية مهمة موجودة  
كلها في مستوي واحد عمودي على خط الارض فان بيانها بهذه الطريقة أعني بتعيين  
مساقط نقطتين من كل منها مما يؤدي الى اللخبطة والارتباك في تمييز بعضها عن بعض  
فلجميع هذه الاسباب يستعمل على العموم مستوي مسقط مساعد خلاف المستويين  
الاصليين وفي الغالب يؤخذ المستوى المساعد المذكور عموديا على المستويين  
الاصليين ويطبق بعد ذلك على أحدهما بتدويره حول أثره عليه وبيان هذه القاعدة  
نطبقها على مثال فنقول

بـ ٤٨ المعلوم مستقيم مثل (ا ب د أ) (شكل ٢٧ لوحة ٦) بمسقطيه  
ا ب د أ على مستويي المسقط الاعتياديين اللذين خط أرضهما هو خض  
والمطلوب إيجاد مسقط ثالث مساعد للمستقيم المذكور على مستوي المسقط المساعد  
مركز العمودي على المستويين الاصليين ولذلك نقطتان اثنتان حيثما اتفق  
من المستقيم المعلوم على مستوي المسقط المساعد مركز والاحسن ان نسط من



هذا المستقيم أثريه وهــ ما آ د ب بأن تنزل أولاً من نقطة آ عموداً على المستوى  
م هـ ك كالعمود آ آ انذى لا يخرج بالضرورة عن المستوى الرأسى للسقط الاصلى  
ويمد حتى يقابل خط م هـ فى نقطة آ التى تكون حينئذ مسقطاً مساعداً ثالثاً للنقطة  
آ ثم تنزل من نقطة ب العمود ب ب على المستوى م هـ ك فلا يخرج هذا العمود  
عن المستوى الافقى للسقط بل يقابل مستوى م هـ ك فى نقطة مثل نقطة ب من الاثر  
هـ ك فاذا دور الالآن المستوى م هـ ك حول أثره الرأسى م هـ حتى ينطبق على المستوى  
الرأسى للسقط رأينا ان أثره الرأسى م هـ ونقطة آ الموحودة عليه يبقيان ثابتين واما  
أثره الافقى هـ ك فانه ينطبق بعد الدوران على هـ غ وكذا نقطة ب ترسم القوس  
ب ب وتصلر بعد الحركة فى نقطة ت وعلى هـ هذا يكون المستقيم آ ت هـ والمسقط  
المساعد الثالث للمستقيم المعلوم ( ا ب د آ ت )

بسط ( مثال آخر ) من المعلوم انه اذا فرض مثلث فى الفراغ وكان مستويه عمودياً على  
خط الارض آل مسقطاً هذا المثلث الى مستقيمين عمودين على خط الارض وموجودين  
على استقامة واحدة وعلى هذا فيمكن اعتبار خطى ا ب د و آ ت ( شكل ٢٨ لوحه ٦ )  
مسقطين لمثلث فراغى روسه منسقة أفقياً فى ا ر ب و د أما على المستوى الرأسى  
فحيث قد فرض ان رأسيه المنسقتين افقياً فى ا ر د متساويتا العلون عن المستوى  
الافقى فتسقطان رأسياً على نقطة واحدة مثل آ ورأسه الثالثة تنسقط وحدها على  
نقطة اخرى كنقطة ت بحيث يكون المثلث مبيناً هكذا ( ا ب د و آ ت ) لكن اذا  
تأملنا نجد ان هذين المسقطين غير كافيين لتعيين وضع أجزاء المثلث من أول وهلة حيث  
ان جميع اضلاع منسقة أفقياً على اتجاه خط ا ب د ورأسياً على خط آ ت فلاجل  
تعيين اجزاء هذا المثلث وظهور هيئة الحقيقة تنسقطه على مستوى مسقط ثالث  
مساعد مثل م هـ ك عمودى على خط الارض ثم ندير هـ هذا المستوى بمافيه المسقط  
المجدى للمثلث حول أثره الرأسى حتى ينطبق على المستوى الرأسى للسقط ولاجل اسقاط  
المثلث ( ا ب د و آ ت ) على المستوى م هـ ك ينزل من جميع روسه مستقيمات  
عمودية على المستوى المذكور مثلاً العمود النازل من الرأس ( ب و ت ) ينسقط افقياً  
على ب ب ورأسياً على ت ت بحيث تسكور نقطتان ب و ت كتابه عن المسقطين الافقى  
والرأسى مسقطاً نقطة ( ب و ت ) الاصلية على المستوى م هـ ك وبمثل ذلك نجد ان

مسقطى مسقط نقطة (١ د آ) عبارة عن (١ د آ) ومسقطى مسقط نقطة (ح د آ) عبارة عن (ح د آ) فاذا توجهنا دوران المستوى م هـ ك حول اثره الرأسى م هـ حتى ينطبق على المستوى الرأسى للمسقط دارت معه النقط الثلاث (ب د ب) و (١ د آ) و (ح د آ) فترسم فى أثناء دورانها اقواسا افقية تنسقط افقيا على اقواس مثلها كالاقواس ب ب و ا ا و ح ح الموجودة فى المستوى الافقى وتنسقط هذه الاقواس رأسيًا على مستقيمي ب ب و آ آ الموازيين الى خط الارض بحيث متى انطبق المستوى المتحرك والنقط الثلاث الموجودة فيه على المستوى الرأسى صارت المساقط الافقية لهذه النقط موجودة فى محلات تقاطع المساقط الافقية للاقواس المرسومة بهامع خط الارض أعنى فى ب ب و ا ا و ح ح فاذا اقيم منها عمدة على خط الارض تقابلت مع خطى ب ب و آ آ فى النقط ب و آ و ح التى اذا وصل بينها بمستقيمات تحصل مثلث ب آ ح هو كناية عن مسقط المثلث (ب د ب و آ د ب) الاصلى على مستوى م هـ ك مطبقا على المستوى الرأسى للمسقط أعنى هو المسقط الثالث المساعد المطلوب وقد بينا ايضا فى الشكل ٢٨ كيفية العمل فى حالة ما يصير تدوير المستوى المساعد م هـ ك حول اثره الافقى هـ ك حتى ينطبق على المستوى الافقى ويكون العمل مشابها بالكتابة لما تقدم فى الحالة الاولى قد اكتفينا ببياننا بالرسم فقط فالتأمل فى عين الشكل كاف

بئس استعمال المساقط المساعدة لا ينفع فقط فى تعيين أوضاع الخطوط التى لا يكفى لتعيينها مسقطان اثنان بل ينفع أيضا لحل بعض مسائل لا يمكن حلها بدون استعمالها أو يمكن حلها بدونها لكن يكون الحل به أقرب وله وردها بعض المسائل التى من هذا القبيل ونعطى كيفية حلها باستعمال المساقط المساعدة

المطلوب تعيين اثرى مستقيم مار بة نقطتين معلومتين وموجودتين فى مستوى عمودى على خط الارض

(شكل ٢٩ لوحه ٧) لنفرض ان النقطتين المعلومتين هما (١ د آ) و (ب د ب) الموجودتان فى المستوى م هـ ك العمودى على خط الارض فلاجل تعيين اثرى المستقيم المار بهما الذى مسقطاه متعديان مع اثرى المستوى م هـ ك يقال لاشك ان الاثرين

المذكورين هما نقطتا تقابل المستقيم الفراغي مع أثري المستوى م هـ ك الشامل له  
حينئذ إذا دور المستوى م هـ ك باعتباره كمستوى مسقط مساعد حول أثره الأفقي  
لينطبق على المستوى الأفقي د ا رت معه نقطتا ( ا د ا ) و ( ب د ت ) وانطبقتا  
في آ د ت كافي (بشك ٤٩) اما اثر المستوى م هـ ك فان أحدهما وهو هـ ك  
يبقى ثابتا في محله والثاني وهو م هـ ينطبق على الجزء و خ من خط الأرض وعلى هذا  
اذا رسم المستقيم آ ت ومذا الى ان يقابل هـ ك في نقطة مثل د فتكون هي أثره الأفقي  
ثم مد من جهته الاخرى الى ان يقابل خط الأرض في نقطة ب فتكون هي أثره الرأسى  
منطبقا معه في المستوى الأفقي فينبغى ايجاد وضعه الحقيقي بأن يرد المستوى م هـ ك الى  
وضعه الاصلى فتعود نقطة ب الى نقطة د التى تكون هي الاثر الرأسى الحقيقي للمستقيم  
المسار بالنقطتين المعلومتين

بشك ٥٠ المطلوب ايجاد خط تقاطع مستوحيثما اتفق مثل س ع صه (شكل ٣٠ لوحة ٧)  
بمستوى آخر مار بخط الأرض وصانع مع المستوى الأفقي زاوية معلومة رمزها ل  
لذلك يقال حيث ان أثرى المستوى المسار بخط الأرض ليسا ظاهرين لكونهما منطبقين  
على خط الأرض المذكور فتتخذ مستوى مسقط مساعد كالمستوى م هـ ك عموديا  
على مستوى المسقط الاصلين وتوهم دورانه حول أثره الرأسى حتى ينطبق على  
المستوى الرأسى فيكون الاثر الجديد للمستوى س ع صه أعنى أثره على المستوى م هـ ك  
كناية عن ب ا وأما اثر المستوى المسار بخط الأرض على المستوى م هـ ك بعينه فهو  
مستقيم كالمستقيم هـ د المار من نقطة د وصانع مع خط الأرض زاوية تساوى لزاوية  
ل وهذا الاثر يتقاطع مع الاثر الاول ب ا في نقطة مثل ب تكون هي بالضرورة نقطة  
من خط التقاطع المطلوب لكونها مشتركة بين المستويين المتقاطعين فاذا توهمنا  
رجوع المستوى الى أصله صارت النقطة المذكورة في الوضع ( د و د ) وبما ان نقطة  
ع هي نقطة مشتركة بين المستويين المعلومين أيضا فتكون هي احدى نقط خط  
تقاطعهما الذى يكون بناء على ذلك هو المستقيم ( ع د و ع د )

فاذا كان المستوى المسار بخط الأرض معيناً معلومية نقطة منه امكن أيضاً حل المسئلة  
بالطريقة بعينها لكن الاسهل اتباع طريقة حلها التى ذكرت ضمن المسئلة المندرجة  
في بشك ٤٩

\* (٣٥) \*

بـ٥٢ د المطلوب إيجاد نقطة تقابل مستويين متوازيين مثل سـ ع صـ  
(شكل ٣١ لوحة ٧) بمستقيم موجود في مستوي عمودي على خط الأرض ومعين الوضع  
معلومية نقطتين من نقطه كالنقطتين (١ د أ) و (ب د ت)  
لذلك يطبق المستوي مـ هـ الشامل للمستقيم المعلوم على المستوي الرأسى بتدويره  
حول أثره الرأسى مـ هـ مع اعتباره كمستوي مسقط مساعد ويبحث كما تقدم عن انطباق  
كل من الاثر الجديد للمستوي المعلوم والمستقيم المعلوم على المستوي الرأسى فيوجدان الاثر  
الجديد للمستوي سـ ع صـ هو د ح وان المستقيم المعلوم الساربه نقطتي (١ د أ)  
(ب د ت) قد انطبق وصار في الوضع آـ ب وهذا المستقيم متقاطع مع الاثر د ح  
في نقطة هـ التي تكون هي نقطة التقابل المطلوبة انما يلزم إيجاد وضعها الحقيقي  
بترجيح المستوي المنطبق الى وضعه الاصلى فترجع معه وتأخذ وضعها الحقيقي  
(هـ د هـ) وهو المطلوب

\* (تنبيه) \* اعلم ان مستوى القطاع الذي استعملناه في (بـ٥٢ د) (شكل ٣١ لوحة ٤)  
لايجاد خط تقاطع مستويين آثارهما موازية لخط الأرض بعد كمستوي مسقط مساعد  
(في المستقيمت والمستويات المتعامدة) \*

بـ٥٣ د (نظرية) اذا كان مستقيم فراغى مثل اب (شكل ٣٢ لوحة ٧) عموديا على  
مستوي فراغى مثل مـ هـ كـ فمسقط هذا المستقيم يكونان عمادين على أثرى المستوي  
النظير على نظيره بمعنى ان المسقط الافقى آـ ب يكون عموديا على الاثر الافقى هـ كـ  
والمسقط الرأسى آـ ب على الاثر الرأسى هـ مـ

وذلك لان المستوي ابـ آـ بـ لما كان هو المستوي المسقط افقيا للمستقيم الفراغى  
على آـ بـ فهو حينئذ عمودي على المستوي الافقى هذا ولكون المستقيم اب عموديا  
على المستوي الفراغى مـ هـ كـ بالفرض فيكون حينئذ المستوي ابـ آـ بـ الساربه  
عموديا أيضا على المستوي مـ هـ كـ اذا تقرر هذا يقال حيث اتضح ان كلامنا من المستوي  
الافقى للمسقط والمستوي مـ هـ كـ عمودي على المستوي ابـ آـ بـ المسقط افقيا  
للمستقيم الفراغى فيكون خط تقاطعهما وهو هـ كـ الذي هو كناية عن الاثر الافقى  
للمستوي مـ هـ كـ عموديا على المستوي ابـ آـ بـ وحيث ذلك فيكون عموديا على  
خط آـ بـ السار بموقعه والموجود في المستوي المذكور وبذا ثبت المطلوب من ان  
المسقط الافقى آـ بـ يكون عموديا على الاثر الافقى هـ كـ وبمثل هذا يبرهن على ان  
آـ بـ عمودي على هـ مـ

وبالعكس اذا كان المسقطان  $\alpha$  و  $\beta$  للمستقيم الفراغي  $ab$  عموديين على  
الآخرين  $هـ ك$  و  $هـ م$  من المستوى الفراغي  $م$  ذلك أقول ان المستقيم الفراغي  
 $ab$  عمودى على المستوى الفراغي  $م$  ذلك وذلك لان المستوى المسقط الذى أثره  
 $\alpha$  هو بالضرورة عمودى على المستقيم  $هـ ك$  وبالتبعة لذلك يكون عموديا أيضا على  
المستوى  $م$  ذلك المشتمل على هذا المستقيم وكذلك من حيث ان المستوى المسقط الذى  
أثره  $\beta$  عمودى على المستقيم  $هـ م$  فيكون عموديا على المستوى  $م$  ذلك المار به  
وبناء على ذلك يكون هذا المستوى الأخير عموديا على كل من المستويين المسقطين  
فى آن واحد ومن ثم يكون عموديا على خط تقاطعهما الذى هو كناية عن المستقيم  
المعلوم فى الفراغ وهذا هو ما اردنا بيانه

• (تنبيه) • ليعلم ان هذه النظرية وعكسها الا يكونان صحيحين الا اذا كانت المساقط  
عمودية أعنى صارت تعينها بمستقيمت مسقطه اتجاهها عمودى على مستويات المسقط  
فيه لم من ذلك انها لا تكون صحيحة فى حالة ما تكون المساقط مائلة وأيضاً ينبغي  
الاحتراز من ان يتوهم ان الارتباط الموجود فى هذه النظرية له مثيل فيما بين  
مستقيمين فراغيين متعامدين على بعضهما لان مساقطهما العمودية لا تكون متعامدة  
الا اذا كان احداً المستقيمين الفراغيين بالاقل موازياً لمستوى المسقط

(نتيجة) اذا اريد انزال مستقيم عمودى من نقطة معلومة على مستو معلوم ينزل من  
مسقطى النقطة المعلومة مستقيمان عمادان على أثرى المستوى فيكونان هما مسقطا  
المستقيم العمودى على المستوى الذى اريد انزاله

بمثال المعلوم نقطة مثل ( ١ و ٢ ) (شكل ٣٣ لوحة ٨) والمطلوب امرار  
مستو عمودى بهما على مستقيم معلوم أيضاً كالمستقيم (ب و ج د)

لذلك يمرر من النقطة ( ١ و ٢ ) احد افقيات المستوى المطلوب أعنى مستقيماً موازياً  
لاثره الافقى فيكون مسقطه الافقى مستقيماً موازياً الى الاثر الافقى للمستوى المطلوب  
ومار بمسقطها الافقى ١ وبما ان الاثر الافقى للمستوى المطلوب سيكون عمودياً على  
المسقط الافقى ب للمستقيم المعلوم فينزل حينئذ العمود  $ا د$  على ب فيكون  $ا د$  هو  
المسقط الافقى لافقى المستوى المطلوب امام مسقطه الرأسى فهو المستقيم  $\alpha$  الموازى  
لخط الارض والمار بنقطة  $\alpha$  فاذا بحثنا عن الاثر الرأسى للمستقيم ( ١ و ٢ )  
ووجدناه فى نقطة  $د$  فينزل منها العمود  $م د هـ$  على  $ت د$  فيكون هو الاثر الرأسى

للمستوى

للمستوى المطلوب ثم لاجل رسم أثره الافقي ينزل من نقطة ه عمود على ب ح كالعمود  
هـ فيكون هو الاثر الافقي للمستوى المطلوب ويمكن ان يمرر بنقطة ( ا د ا )  
مستقيم مثل ( ا هـ د آ هـ ) احد رأسيات المستوى المطلوب عوضا عن ممرر بها من احد  
افقياته والعمل مشابه لما تقدم

بمقد اذا فرض في المسئلة السابقة ان المستقيم المعلوم موجود في مستوى عمودي على  
خط الارض كالمستقيم المار بنقطة ( ا د ا ) و ( ب د ب ) (شكل ٣٤ لوحة ٨)  
وان النقطة المعلومه هي ( ح د ح ) ففي هذه الحالة لا يمكن اتباع طريقة المحل التي  
استعملت في البند السابق بل يعتبر المستوى م هـ ك المسقط للمستقيم المعلوم ك مستوى  
مسقط مساعد و يطبق على المستوى الراسي ويبحث عن المسقط الجديد لكل من  
النقطة والمستقيم المعلومين فيوجدان مسقط نقطة ( ح د ح ) على المستوى المساعد  
بعد تطبيقه هو نقطة ح و مسقط المستقيم المعلوم عليه بعد تطبيقه أيضا هو  
آ ت فاذا تقرره زايا قال اذا صرفنا النظر مؤقتا عن المستوى الافقي للمسقط  
واعتبرنا ان مستويي المسقط الجديدين هما المستوى الراسي الاصل والمستوى  
م هـ ك المساعد فيكون المستقيم م هـ ك خط ارض لهما وتؤل المسئلة  
الى ان المعلوم نقطة فراغية مثل ( ح د ح ) بمسقطها على مستويي المسقط الجديدين  
ومستقيم مثل ( آ ت د آ ت ) موجود في مستوى المسقط م هـ ك المنطبق والمطلوب  
من النقطة المذكورة مد مستو عمودي على المستقيم ( آ ت د آ ت ) ولا شك انه يكفي  
لمحل المسئلة بعد ان آلت الى هذا المنطوق أن يرسم من نقطة ح مستقيم مثل ح د هـ  
عمودي على آ ت فيكون هو أثر المستوى المطلوب على مستوى المسقط المساعد  
ثم يقام من نقطة تقابله بخط الارض المستعار وهي نقطة د عمود مثل د و على خط  
الارض المذكور فيكون هو أثر المستوى المطلوب على المستوى الراسي للمسقط فاذا  
توهمنا قيام المستوى المنطبق رجعت نقطة هـ الى نقطة مثل د بمد منها عمود على المسقط  
الافقي الاصل للمستقيم المعلوم كالعمود د و فيكون هو الاثر الافقي للمستوى المطلوب  
بمقد المطلوب ايجاد البعد الاصغر بين نقطة مثل ( ا د ا ) ومستو مثل م هـ ك  
(شكل ٣٥ لوحة ٨)

لذلك ينزل اولا من نقطة ( ا د ا ) عمود غير محدود على المستوى م هـ ك المعلوم  
بأن يؤخذ مسقطاه ا ب و آ ت عمودين على اثره هـ ك د هـ كل على نظيره

ذلك بمقتضى النتيجة المقررة في (ب ٤٣ د) ثم يبحث عن نقطة تقابل هذا العمود بالمستوى  
هـ ك بمقتضى ما تقدم في (ب ٤٦ د) فنجد هـ نقطة (ب د ت) ويكون حينئذ  
استقيمان اب و آ ت هما مسقطا البعد الاصغر المطلوب أما حقيقة فتبين كما  
تقدم في (ب ٤٧ د) بمدا لافى وت هـ مساويا الى اب ووصل الوتر آ هـ فيكون هو  
حقيقة البعد الاصغر بين نقطة (ا د آ) والمستوى م هـ ك

٥٧ د (شكل ٣٦ لوحة ٨) المطلوب إيجاد البعد الاصغر بين نقطة مثل  
(ا د آ) ومستقيم مثل (ب د ت)

ذلك يمر رأولا من النقطة المعلومة (ا د آ) مستو عمودى على المستقيم (ب د ت) في  
يبحث عن نقطة تقابله بالمستقيم المذكور ويبعد إيجادها نصل منها الى النقطة المعلومة  
بستقيم فيكون هو البعد الاصغر المطلوب ولاجل تحرير المستوى العمودى على المستقيم  
(ب د ت) من نقطة (ا د آ) يمرر بها طبقة الماسا تقرر في (ب ٤٤ د) أفقى  
كالأفقى (ا د آ) من ضمن أفقيات المستوى المطلوب ومن أثره الرأسى د يمرر  
الوتر الرأسى س د ع للمستوى المذكور عموديا على ت د ثم يرسم أثره الأفقى ع ص  
عموديا على ب د ثم يبحث بمقتضى (ب ٤٦ د) عن نقطة تقابل المستوى س د ع ص  
بالمستقيم (ب د ت) فنجد هـ نقطة مثل (ه د هـ) فاذا وصل منها الى نقطة  
(ا د آ) بمستقيم مثل (ا هـ د آ هـ) كان هذا المستقيم موجودا بالطبيعة داخل  
المستوى س د ع ص وبناء على ذلك يكون عموديا على (ب د ت) وبه يقدر البعد  
الاصغر المطلوب أما حقيقة هذا البعد وهى اط فانها تتعين بمقتضى (ب ٤٧ د) بواسطة  
المستقيمين ا هـ د آ هـ

اعلم انه لا داعى كون المستوى س د ع ص فى الشكل الحاضر ليس من معالم المسئلة  
الاصليه ولا من نتائجها بل هو فقط وسيلة للوصول الى المحل قدر رسم اثره من جنس  
الخطوط المساعدة المهمة طبقا لما تقرر في (ب ٤٣ د)

٥٨ د (شكل ٣٧ لوحة ٩) حل آخر للمسئلة نفسها اذا اريد إيجاد البعد  
الاصغر بين نقطة مثل (د و ح) ومستقيم مثل (اب و آ ت) يمرر رأولا بهما مستو  
ولذلك يكفي أن نصل من نقطة (د و ح) الى احدى نقط المستقيم (اب و آ ت)  
ولتكن نقطة (ا د آ) مثلا بمستقيم مثل (ا د و آ د) ثم يبحث عن الاثرين  
الرأسيين لكل من المستقيم المذكور والمستقيم المعلوم (اب و آ ت) فيكون خطا

تسمي  $\Gamma$  م عبارة عن أثرى المستوى المساعد الذي أريد تقريره بالنقطة والمستقيم  
المعلومين ثم نطبق المستوى  $\Gamma$  م على المستوى الأفقي بتدويره حول أثره الأفقي  $\Gamma$  م  
لكن نفرض أنه يجنب معه في أثناء دورانه كلاما من النقطة والمستقيم المعلومين ومن  
المعلوم أنه في أثناء هذه الحركة لا تخرج نقطة  $(\beta \text{ و } \gamma)$  عن المستوى الرأسي  $\beta \gamma$   
المعزى على محور الدوران  $\Gamma$  م ولا يرب ان بعد هذه النقطة عن النقطة الثابتة  $\Gamma$  م  
أعني البعد  $\Gamma$  م لا يحصل له أدنى تغير بل يبقى طوله ثابتا وبناء على ذلك اذا رسم بنصف  
القطر  $\Gamma$  م قوس دائرة يقطع خط  $\beta \gamma$  في نقطة مثل  $\delta$  فتكون هذه النقطة هي  
منطبق نقطة  $(\beta \text{ و } \gamma)$  وكذا يكون المستقيم  $\Gamma$  م منطبق المستقيم المعلوم  
والمستقيم  $\Gamma$  م منطبق الأثر الرأسي  $\Gamma$  م للمستوى  $\Gamma$  م وبمثل ذلك اذا مدد المحور  $\Gamma$  م  
 $\delta \gamma$  و  $\delta$  على المحور  $\Gamma$  م شوهذا المستقيم  $(\alpha \gamma \text{ و } \delta \gamma)$  ينطبق في  $\delta$  وان  
نقطة  $(\delta \text{ و } \gamma)$  تنتقل الى نقطة  $\delta$  فاذا تقرر هذا يقال حيث ان جميع معالم المسئلة  
صارت منطبقة على المستوى الأفقي بدون حصول أدنى تغير في أوضاعها المتناظرة فيمكن  
أن ينزل على  $\Gamma$  م ومثل  $\delta$  فيكون هو البعد الا صغر المطلوب مينا بطوله الحقيقي  
ولا يخفى ان الطول الحقيقي هو الذي معرفته تكون في العادة أهم ومع ذلك اذا أريد  
تعيين وضع هذا البعد الا صغر فلا يبقى سوى أن ترفع الجملة المنطبقة الى وضعها الاصل  
فترجع نقطة  $\delta$  الى  $\beta$  المعزى على محور الدوران  $\Gamma$  م ثم يعين مسقطها الرأسي  $\gamma$  المعزى على  
خط الارض وأخيرا يكون البعد الا صغر منسقطا على كل من المستقيمين  $\delta \gamma$  و  $\delta \gamma$   
بشده استعمال هذا الحل الأخير يكون ضروريا في حالة ما اذا أريد إيجاد  
نقطة على المستقيم  $(\alpha \text{ و } \beta)$  تكون متباعدة عن نقطة  $(\delta \text{ و } \gamma)$  بنكية  
معلومة ك مثلا لانه يكفي لذلك من بعد تطبيق كل من النقطة والمستقيم المعلومين  
في  $\delta \gamma$  أن يرسم قوس دائرة مثل  $\delta \gamma$  بنصف قطر  $\delta \gamma$  فيقطع المستقيم  
 $\Gamma$  م في نقطة مثل  $\epsilon$  فتكون هي النقطة المطلوبة لكنها في حالة انطباق ثم يرفع  
الجملة حول محور الدوران  $\Gamma$  م ترجع نقطة  $\epsilon$  الى نقطة مثل  $\epsilon$  ويكون مسقطاهما  
 $\epsilon$  و  $\delta$  ومن المشاهد انه يوجد على المستقيم  $\Gamma$  م نقطة ثانية بخلاف نقطة  $\delta \gamma$  تحمل  
المسئلة وذلك لانه لما كان القوس  $\delta \gamma$  قاطعا للمستقيم المذكور في نقطة ثانية مثل  
 $\epsilon$  فتكون هذه النقطة حلا آخر للمسئلة



بشأن (زوايا ميل المستقيمت والمستويات على بعضها) من المعلوم أن كل مستقيمين فراغين لا يمكنهما أن يشغلا بالنسبة لبعضهما بعضا سوى أوضاع ثلاثة الأولى أن يكونا متقاطعين مع بعضهما تقاطعا حقيقيا وفي هذه الحالة يطلق على الزاوية الواقعة بينهما اسم زاوية ميل أحدهما على الآخر والوضع الثاني أن يكونا غير موجودين في مستو واحد أعني لا متقاطعين ولا متوازيين ففي هذه الحالة لا يكون بين المستقيمين المذكورين زاوية حقيقية وانما صار الاتفاق على أن يعطى اسم زاوية ميلهما على بعضهما إلى الزاوية الواقعة بين مستقيمين موازيين لهما على التناظر وموجودين من نقطة واحدة فراغية والوضع الثالث أن يكونا متوازيين وفي هذه الحالة لا يكون بينهما زاوية ميل بالكلية فلنتصدي حينئذ للكلام على كيفية إيجاد زاوية ميل مستقيمين معلومين بمساقطهما في حالة ما يكونان متقاطعين أو غير موجودين في مستو واحد فنقول

(شكل ٣٨ لوحة ٩) المعلوم مستقيمان مثل (ا ب د آ) و (ح د ح د) متقاطعين في نقطة مثل (هـ د هـ) والمطلوب إيجاد زاوية ميل أحدهما على الآخر لذلك يقال إذا بحثنا عن الأثرين الأفقيين للمستقيمين المعلومين ووجدنا أنهما ب و د وصلنا بينهما بخط مستقيم مثل ب د رأينا أن هذا المستقيم قاعدتا لثلاث رأسه هي نقطة تقاطع المستقيمين المعلومين أعني نقطة (هـ د هـ) وزاوية التي رأسها في هذه النقطة هي الزاوية التي يبحث عنها ومن ذلك يشاهد أنه كان يمكن إنشاء هذا المثلث بالبحث عن أطوال أضلاعه الثلاثة بواسطة مساقطها المألوفة لكن الأصوب استعمال ارتفاع هذا المثلث ولكون أن هذا الارتفاع هو بالبداية وتر لثلاث قائم الزاوية قاعدته هي العمود هو النازل من نقطة هـ على خط ب د وارتفاعه هو الرأسى المسقط أفقيا لرأسه في نقطة هـ الذي يقدر بالبعد هـ هـ فبناء على ذلك إذا أخذ البعد و هـ وصل هـ هـ وصل هـ هـ كان هذا المستقيم هو ارتفاع المثلث الأصلي وحينئذ إذا طبق هذا المثلث على المستوى الأفقي بتدويره حول قاعدته ب د فرأسه لا يخرج عن المستوى الرأسى مره العمودى على هذه القاعدة بحيث لو أخذنا بالابتداء من نقطة هـ على اتجاه الخط مره بعد مثل مره هـ هـ وصل خطا هـ هـ د هـ حدث مثلث مثل هـ هـ هـ وانطبق المثلث المطلوب وزاوية رأسه هـ هـ هـ تكون عبارة عن زاوية ميل المستقيمين الأصليين (ا ب د آ) و (ح د ح د) على بعضهما أعني الزاوية المطلوبة

بند (شكل ٣٩ لوحه ٩) المطلوب إيجاد زاوية ميل مستقيمين مثل  $ا ب$  و  $ا ت$  و  $(ح د و ح د)$  غير موجودين في مستو واحد على بعضهما  
 فالأجل التحقق من كون هذين المستقيمين غير موجودين في مستو واحد ينظر  
 لوضع مساقطهما بالنسبة لبعضهما بعضا فان وجد كما في شكلنا هذا ان المساقط المتعددة  
 الاسم غير متوازية أو انها متقاطعة مثلي ~~لكن~~ نقطة تقاطع المسقطين الأفقيين  
 $ا ب$  و  $ح د$  ليست مع نقطة تقاطع المسقطين الرأسيين  $ا ت$  و  $ح د$  على هوو واحد  
 على خط الأرض علم من الشرط الأول ان المستقيمين الفراغيين غير متوازيين ومن  
 الثاني انهما غير متقاطعين واذن هما غير موجودين في مستو واحد  
 وثانياً لأجل إيجاد زاوية ميل أحدهما على الآخر يقال حيث ان هذه الزاوية هي بمقتضى  
 تعريفها المقرر في بند الزاوية الواقعة بين مستقيمين متقاطعين في نقطة حيثما  
 اتفق وموازيين للمستقيمين الأصليين فالأصوب ان تؤخذ هذه النقطة على أحد المستقيمين  
 المعلومين ولتكن هي نقطة  $(ه و ه)$  من المستقيم  $(ح د و ح د)$  ثم يرسم منها  
 مستقيم مثل  $(ه و و ه و)$  مواز إلى  $(ا ب و ا ت)$  وبذلك تثول المسئلة إلى  
 البحث عن زاوية ميل المستقيمين  $(ح د و ح د)$  و  $(ه و و ه و)$  المتقاطعين  
 في نقطة  $(ه و ه)$  على بعضهما بعضا وقد سبق حل هذه المسئلة في البند السابق فاذا  
 طبقنا الحل المتقدم في البند السابق على المستقيمين  $(ح د و ح د)$  و  $(ه و و ه و)$   
 رأينا ان زاوية ميلهما على بعضهما هي الزاوية المنطبقة على حقيقتها في  $ه و و ه و$  وهذه  
 الزاوية هي أيضا زاوية ميل المستقيمين الأصليين  $(ا ب و ا ت)$  و  $(ح د و ح د)$   
 على بعضهما

بند (شكل ٤٠ لوحه ٩) اذا كان أحد المستقيمين اللذين يراد البحث عن  
 زاوية ميلهما على بعضهما أفقياً كالمستقيم  $(ا ب و ا ت)$  وكان المستقيم الثاني حيث  
 اتفق كالمستقيم  $(ح د و ح د)$  فن حيث انه طبقاً لما تقرر في (بند ١) كان ينبغي  
 البحث عن الأثرين الأفقيين لهذين المستقيمين ويوصل بينهما بمستقيم فيكون هو الأثر  
 الأفقي للمستوى المار بهما وهو أيضاً قاعدة مثلث ضلعاها الأثران هما المستقيمان  
 المعلومان إلى آخر ما تقرر في البند المذكور ولكن لكون ان أحد المستقيمين المعلومين  
 هنا هو  $(ا ب و ا ت)$  أفقي فلا يوجب له أثر أفقي ومن المعلوم ان الأثر الأفقي للمستقيم  
 الثاني وهو  $لا$  يكفي وحده لرسم الأثر الأفقي للمستوى المار بالمستقيمين لكن اذا نظرنا

الى كون المستقيم ( ا ب د آ ) سيصير احداً أفقياته علمنا ان الاثر الافقى لذلك المستوى يلزم ان يكون موازياً الى المسقط الافقى ا ب وعلى هذا اذا رسم من نقطة و مستقيم مثل و و موازياً الى ا ب كان هو الاثر الافقى للمستوى المار بالمستقيمين المعلومين ثم نتوهم دوران المستوى المذكور بمقادير المستقيمين المذكورين حول أثره الافقى و حتى ينطبق على المستوى الافقى فنقطة ( هـ د هـ ) تنطبق في نقطة هـ والمستقيم ( هـ د هـ ) ينطبق تبعاً لذلك على هـ واما المستقيم الافقى ( ا ب و آ ) فانه ينطبق على المستقيم هـ و المرسوم من نقطة هـ موازياً الى الاثر و وعلى هذا تكون زاوية هـ و هـ هي الزاوية المطلوبة

فاذا فرض ان كلا المستقيمين المعلومين افقى كان الامر سهلاً جداً لان زاوية ميل المستقيمين الفراغيين تكون في هذه الحالة مساوية للزاوية الواقعة بين مسقطيهما الافقيين

بـ ٢٣ زاوية ميل مستقيم مثل ا ب (شكل ١٤ لوحة ١٠) على مستوٍ مثل م هـ هي الزاوية المحادة ا ب ح التي يصنعها هذا المستقيم مع مسقطه العمودى ب ح على المستوى المذكور (وانما قلنا مسقطه العمودى لكي لا يتوهم ان المقصود هو المسقط المائل) فان قيل ما السبب الذى أوجب الاتفاق على تخصيص الزاوية ا ب ح بانها من دون الزوايا التي يصنعها المستقيم الفراغى ا ب مع جميع المستقيمات المارة بموقعه الموجودة في المستوى م هـ هي التي يطلق عليها اسم زاوية ميل المستقيم ا ب على المستوى م هـ قلنا ان السبب في ذلك هو كونها أصغر من أى زاوية مثل ا ب د يصنعها المستقيم ا ب مع أى مستقيم مثل ب د موجود في المستوى وللهمة على ذلك يؤخذ البعدان ب ح و ب د متساويين ويقام من نقطة ح عمود مثل ح ا على المستوى م هـ فيقابل بالضرورة مستقيم ا ب في نقطة مثل ا يصل منها الى د بمستقيم مثل ا د فيحدث مثلثا ا ب ح و ا ب د فيهما ضلع ا ب مشترك وضلع ب ح و ب د متساويان بالعمل لكن ضلع ا ح من مثلث ا ب ح أصغر من ضلع ا د من مثلث ا ب د لكون الاول عمودياً والثاني مائلاً وحينئذ تكون زاوية ا ب ح أصغر من زاوية ا ب د

(نتيجة) حيث ان مثلث ا ب ح قائم الزاوية في ح فتكون زاوية ا ب ح منه متممة زاوية ح ا ب بحيث متى علمت احدهما تعلم الاخرى ومن ذلك تؤخذ الطريقة الآتية

وهي انه لاجل ايجاد زاوية ميل مستقيم مثل اب على مستو مثل م ه يفرض على اب نقطة مثل ا وينزل منها عمود مثل اد على المستوى م ه ويبحث بمقتضى ما تقدم عن الزاوية ب ا د الواقعة بين المستقيمين اب د ا فالزاوية المتممة لها تكون هي الزاوية المطلوبة ولنطبق هذه الطريقة على مثال فنقول

بمث ١٤ المطلوب ايجاد زاوية ميل مستقيم مثل (ا ب د آت) (شكل ٤٢ لوحه ١٠) على مستو مثل م ه ك

لذلك تؤخذ بمقتضى النتيجة السابقة نقطة مثل (د ر ح) على المستقيم (ا ب د آت) بالاختيار وينزل منها عمود مثل (د ر ح د) على المستوى م ه ك ثم يبحث بمقتضى (بمث ١٤) عن الزاوية الواقعة بين مستقيمي (ا ب د آت) و (د ر ح د) بان تنزل العمود ح ر على امتداد د ر ثم تأخذ بعد ل ث = ح ر وبعد ذلك تأخذ م ر = ح ر فنكون زاوية ب ح د هي زاوية ميل المستقيمين المذكورين على بعضهما واخير ترسم الزاوية المتممة لهذه الزاوية بان يمد ح د عموديا على ح د فنكون زاوية ب ح د هي زاوية ميل المستقيم (ا ب د آت) على المستوى م ه ك وهو المطلوب

بمث ١٥ (شكل ٤٣ لوحه ١٠) المطلوب ايجاد زاويتي ميل مستقيم مثل (ا ب د آت) على مستويي المسقط

قد كان يمكن حل هذه المسئلة باعتبارها كحالة خصوصية من المسئلة السابقة ولكن الاقرب والأصوب ان نحل مباشرة بملاحظة ما تقدم في (بمث ١٤) من ان زاوية ميل المستقيم (ا ب د آت) على المستوى الافقي ما هي الا الزاوية الواقعة بين هذا المستقيم في الفراغ وبين مسقطه الافقي اب وحيث من المعلوم ان هذه الزاوية الاخيرة هي احدى زوايا مثل قائم الزاوية قاعدته المستقيم اب وارتفاعه ا آ فاذا طبق هذا المثلث على المستوى الرأسى بتدويره حول ا آ وانطبق على مثلث ا آ ت مثلا علم ان زاوية ا ت آ هي الزاوية المطلوبة

وبمثل ذلك يقال ان زاوية ميل المستقيم (ا ب د آت) على المستوى الرأسى هي جزء من مثلث قائم الزاوية ضلعا هما ا آ و ب ت فاذا طبق هذا المثلث على المستوى الافقي بتدويره حول ب ت وانطبق على مثلث ب ت آ علم ان زاوية ب آ ت هي زاوية ميل المستقيم على المستوى الرأسى للمسقط

بـ٦٦ الد معلوم نقطة مثل ( ا د ا ) (شكل ٤٤ لوحة ١٠) في الفراغ والمطلوب  
تمرير مستقيم بها يصنع مع المستوى الافقي زاوية معلومة مثل و ومع المستوى الرأسى  
زاوية اخرى معلومة مثل هـ

لذلك تؤخذ أولاً نقطة اختيارية مثل ( ب د ب ) من نقط المستوى الرأسى ويمرر بها  
مستقيم مثل ب د بحيث يكون صانعاً مع خط الارض زاوية تساوى زاوية و ثم نتوهم  
دوران هذا المستقيم حول الرأسى ب بحيث ان نقطة أثره ترسم القوس د ب بنصف  
القطر ب د ففي جميع الاوضاع التى يأخذها المستقيم المتحرك أثناء حركته يكون  
دائماً صانعاً مع المستوى الافقى زاوية تساوى زاوية و فاللازم لنا حينئذ هو ان نلتخب  
فقط من هذه الاوضاع الوضع الذى يكون فيه المستقيم المتحرك صانعاً أيضاً مع المستوى  
الرأسى زاوية تساوى زاوية هـ وحيث اننا اذا أنشأنا على المستقيم ب د زاوية مثل  
ب د مساوية الى هـ وأنزلنا على المستقيم الغير محدود ب د عموداً مثل د و كان  
بالضرورة المثلث القائم الزاوية ب د و الحادث من ذلك عين المثلث القائم الزاوية الذى  
يصنعه المستقيم المجهول مع مسقطه الرأسى وحينئذ اذا رسم قوس الدائرة د ب بنصف  
القطر ب د وأقيم من نقطة د عمود د و على خط الارض ومدحتى ب د لافى مع القوس  
ب د فى نقطة مثل د كان المستقيمان ب د ب د مسقطين لمستقيم فراغى صانع  
مع المستوى الافقى زاوية تساوى و ومع المستوى الرأسى زاوية تساوى هـ

ثم بعد ذلك يرسم من النقطة المعلومة ( ا د ا ) الاصلية مستقيم مثل  
( ط ا ب د ط ا ب ) مواز الى ( ب د ب ) فيكون هو المستقيم المطلوب

بـ٦٧ د (شكل ٤٥ لوحة ١١) المطلوب إيجاد زاويتى ميل مستو معلوم مثل م هـ ك  
على مستوي المسقط

قد علم من الهندسة العادية انه لاجل تقدير زاوية ميل مستويين على بعضهما البعض  
قطعهما بمستو ثالث عمودى على خط تقاطعهما فتكون الزاوية الواقعة بين خطى  
تقاطعهما هما هى معيار الزاوية المطلوبة فعلى مقتضى ذلك يقال لنقطع المستوى م هـ ك  
مع المستوى الافقى للمسقط بمستو عمودى على الاثر هـ ك فهذا المستوى يكون رأسياً  
بالضرورة ويكون أثره الافقى مستقيماً مثل ا د عمودياً على هـ ك وأثره الرأسى  
مستقيماً عمودياً على خط الارض كالمستقيم د و وبناء على ذلك فهو يقطع المستوى  
المعلوم فى مستقيم هو الخط الواصل فى الفراغ من نقطة ا الى نقطة د وهو وتر المثلث قائم

الزاوية ضلعاها  $ا و ر$  و  $و ت$  وحينئذ اذا دور هذا المثلث حول  $و$  لاجل تطبيقه على المستوى الرأسى للسقط فانه ينطبق على المثلث  $آ و$  الذى تكون زاويته التى اسمها كاسمه هذا هي زاوية ميل المستوى  $م ه ك$  على المستوى الافقى وللحصول على زاوية ميل المستوى  $م ه ك$  على المستوى الرأسى للسقط بقطعان بمستوى حيثما اتفق انما يكون عموديا على الاثر الرأسى  $م ه$  وذلك كالمستوى  $ح و ت$  فينشأ عنه مثلث قائم الزاوية ضلعاها  $ح و ر$  و  $و ت$  وحينئذ فن بعد تطبيق هذا المثلث على المستوى الافقى بتدويره حول  $ح و$  يؤل الى مثلث  $و ت ح$  الذى فيه زاوية  $ت$  عبارة عن زاوية الميل المطلوبة

(تنبيه) قديمين غالباً المستوى فى بعض الفنون بأثره الافقى  $ه ك$  وبزاوية ميله على المستوى الافقى كزاوية  $و$  مثلاً وبواسطة هذه المعاليم يمكن دائماً بالسهولة إيجاد أثره الرأسى بواسطة مستوى القطاع  $ا و$  العمودى على  $ه ك$  الذى يكون مشتملاً على زاوية  $و$  لانه اذا طبقنا  $ا و$  على  $آ و$  وأنشأنا زاوية  $آ و ت = و$  ثم مددنا ضلعاها  $آ و$  فإنه يقطع الخط الرأسى  $و ت$  فى نقطة مثل  $ز$  تكون هى نقطة من الاثر الرأسى المجهول فيوصل منها الى نقطة  $ه$  بمستقيم مثل  $م و$  فيكون هو الاثر الرأسى المطلوب

بل قد لا يستعمل المستوى الرأسى للسقط بالكلية ويطبق القطاع حول  $ا و$  بأن تعمل الزاوية  $ا و ت = و$  ولا شك ان هذا كاف لبيان وضع المستوى بطريقة واضحة وضوحاً كافياً ولان تستنتج منه النتائج التى يحتاج اليها ولكن اذا تأملنا نجد ان مستوى القطاع  $ا و$  قد حل فى باطن الامر محل المستوى الرأسى للسقط بـ ٢٨ (شكل ٥٤ لوحة ١١) المعلوم نقطة مثل نقطة  $(ع , ح)$  والمطلوب مدمستو منها بحيث يكون صانعاً مع المستوى الافقى زاوية معلومة مثل  $و$  ومع المستوى الرأسى زاوية اخرى معلومة أيضاً مثل  $ه$

فلنلاحظ أولاً أن مستويي  $ا و ر$  و  $ا و ت$  القاطعين فى المسألة المتقدمة يلزم ان يتقاطعا هما انفسهما فى مستقيم عمودى على المستوى  $م ه ك$  وهذا المستقيم يكون بالضرورة عبارة عن البعد الاصغر بين المستويين المذكورين نقطة  $و$  التى هي احدى نقط خط الارض وكذلك من حيث أنه بتطبيق هذا العمود مرة بعد اخرى مع المثلثين نجد ان انطباقيه مبينان بالعمودين  $و ر$  و  $و ت$  المتزاين على وترى هذين المثلثين

فيعلم من ذلك أنه مهما كان وضع المستوى م هـ ك فلا بد من وجود هـ ذا الارتباط  
وهو ان  $د = و = ق$  اذا تقرر هذا يقال اذا صرف النظر عن كون المستوى م هـ ك  
معلوماً وكان المعلوم فقط هو زاوية متساوية على مستويي المسقط وهما و هـ ثم رسمنا  
على خط الارض مثلثاً قائم الزاوية مثل د هـ آ بحيث تكون زاوية د هـ آ مساوية  
الى و وبعد ذلك رسمنا قوس دائرة بنصف قطر مساو للعمود د ق ثم رسمنا مستقيماً  
مماساً لهذا القوس وصانعاً مع خط الارض زاوية تساوي هـ كالماس ت ق ح الصانع  
مع خط الارض زاوية ت هـ هـ فهذا المماس يتقاطع مع امتداد الرأسى د هـ في نقطة  
مثل ح من أن المستوى م هـ ك وحيث ان هذا الرسم المستقيم ح هـ مماساً الى قوس الدائرة  
المرسوم بنصف القطر د آ ثم وصل من نقطة هـ الى نقطة د بمستقيم علمنا اننا انرا  
مستوي فراغى مائل على مستويي المسقط بقدر زاويتي و د هـ وحيث ان لم يبق على حل  
المسئلة الاصلية سوى ان يمرر بنقطة (ح د ع) المعلومه مستو مواز الى المستوى  
م هـ ك فيطبق المحل المستعمل لذلك في (ب ٣٤) بتعين مستو كالستوى س ع ص  
هو المستوى المطلوب

ويمكن ايضا حل هذه المسئلة بأن يرسم أولاً بمقتضى (ب ٦٦) مستقيم يكون صانعا  
مع مستويي المسقط زاويتي مثل

$$د = و = ق \quad و \quad هـ = ق = د$$

ثم يمرر بعد ذلك بالنقطة المعلومه مستو عمودى على هـ ذا المستقيم فيكون هو المستوى  
المطلوب

ب ٦٩ (شكل ٤٦ لوحه ١١) المطلوب ايجاد الزاوية الواقعة بين مستويين  
معلومين مثل م هـ ك و س ع ص أعنى زاوية ميل احدهما على الآخر  
لذلك يقال يلزم بناء على ما قيل في (ب ٦٧) أن نقطع هـ ذين المستويين بمستو ثالث  
عمودى على خط تقاطعهما وحيث انه بالبحث بمقتضى (ب ٣٨) عن خط تقاطع هـ ذين  
المستويين نجده عبارة عن المستقيم (ا ب د آ) وهو في الفراغ كناية عن وتر  
مثلث قائم الزاوية ضلعا هـ ما ا ب د آ بحيث اذا طبق هذا المثلث على المستوى  
الافقى آل الى ا ب آ وحيث ان اذا أقيم من نقطة ح المفروضة بالاختيار على هذا  
الوتر عمود عليه مثل ح د ثم توهمنا بعد ذلك قيام المثلث ا ب آ في وضعه الرأسى ا ب آ  
فن الواضح المجلى ان الخط ح د يصير اذ ذاك موجودا في المستوى القاطع الذى يراد تمثيله  
بنقطة

بنقطة  $\gamma$  عموديا على الفصل المشترك ثم من حيث ان خط  $\gamma$  مقابل للمستوى الافقي في نقطة  $\delta$  فيكون المستقيم  $\delta\gamma$  المرسوم منها عموديا على المسقط  $\delta$  هو مقتضى (ب ٥٣) عبارة عن الاثر الافقي لهذا المستوى القاطع ومن المشاهد ان هذا المستوى الاخيرة قطع المستويين المعلومين في مستقيمين مارين بنقطة  $\gamma$  المعتبرة في الفراغ من جهة ومن الاخرى بنقطة  $\delta$  وهو صانعين لثلاث قاعدته هي  $\delta\gamma$  وزاويته التي في رأسه  $\gamma$  تكون هي الزاوية المطلوبة وعلى ذلك فليس الامر محتاجا الى رسم هذا المثلث على احد مستويي المسقط وحيث ان ارتفاعه هو  $\gamma\delta$  بلا شك ليكون هذا المستقيم في وضعه الفراغي موجودا داخل المستوى الراسي  $\delta$  العمودي على القاعدة وهو فلو طبق هذا المثلث بتدويره حول خط  $\delta\gamma$  على المستوى الافقي فان رأسه  $\gamma$  لا يخرج عن المستوى الراسي  $\delta$  العمودي على هذا المحور وحيث اذا أخذ على المستقيم  $\delta$  بعد مثل  $\delta=\gamma$  كان مثل  $\delta\gamma$  هو المثلث المطلوب وزاوية  $\delta\gamma$  منه هي زاوية ميل المستويين  $\delta$   $\gamma$  مذكور سعة على بعضهما

ومن الممكن ايضا ان يطبق خط تقاطع المستويين المعلومين على المستوى الراسي عوضا عن تطبيقه على المستوى الافقي فيصير هذا المستقيم منطبقا في هذه الحالة على  $\delta\gamma$  فاذا اقيم عليه عمود مثل  $\gamma\delta$  ورداثر هذا العمود وهي نقطة  $\gamma$  الى نقطة  $\delta$  أمكن اجراء العمل من هذه النقطة كما أجرى في الحالة المتقدمة

بند ٧ إذا كان اثران من آثار المستويين المعلومين متوازيين على مستوي واحد من مستويي المسقط كما في مستوي  $\delta$  مذكور سعة (شكل ٤٧ لوحة ١١) لم ادخال بعض تغييرات خفيفة في العملية المتقدمة من شأنها جعل الحل أسهل مما تقدم لانه لا يخفى على من عرف مافي (ب ٥٩) ان خط التقاطع يكون في هذه الحالة كناية عن المستقيم الافقي ( $\delta$  و  $\gamma$ ) الموازي للاثرين الافقيين وبناء على ذلك اذا مر مستوي راسي مثل  $\delta$  عمودي على خط التقاطع المذكور فانه يقطع المستويين المعلومين في مستقيمين صانعين مع  $\delta$  مثلثا رأسه في نقطة  $\delta$  وارتفاعه هو الراسي  $\delta$  بحيث لو طبق هذا المثلث على المستوى الافقي بتدويره حول قاعدته  $\delta$  لا تت رأسه وهي  $\delta$  في  $\delta$  وصارت زاوية  $\delta$  كناية عن زاوية ميل المستويين المعلومين على بعضهما

وأخيرا اذا كانت جميع آثار المستويين المعلومين موازية لخط الارض كما في



(شكل ٢١ لوحة ٤) لزم قطع المستويين المذكورين بمستوى القطاع غ و ه  
الذي سبق استعماله في (شكل ٤٤) فبواسطة عمليه التطبيق التي أجريتها في البند  
المذكور تحصل زاوية مثل حها فتكون هي زاوية ميل المستويين المعلومين لان  
مستوى القطاع عمودي من طبيعته على خط تقاطعهما  
بشأن المطلوب إيجاد وضع مقدار البعد الاصل - غرين مستقيمين غير موجودين في  
مستوى واحد

قد تقدم ان المستقيمين ان لم يكونا متقاطعين ولا متوازيين فهما غير موجودين في مستوى  
واحد ومن الضروري حينئذ معرفة أصغر الأبعاد الواصلة بين نقطتين من نقطتهما  
انما لاجل سهولة فهم تسلسل العمليات اللازمة لاجراء الحل هذه المسئلة نبتدئ أولا ببيانها  
بطريقة نظرية على شكل نظري فنقول اذا فرض ان المستقيمين المعلومين هما  
ح و ا ب (شكل ٤٨ لوحة ١٢) فنأخذ نقطة اختيارية مثل ه على المستقيم  
الاول ونرسم منها مستقيما مثل هو موازيا الى ا ب ونوهم تمير المستوى وهو  
فهذا المستوى يصير موازيا من نفسه الى المستقيم ا ب فعلى هذا اذا أنزل من أى  
نقطة من نقطه هذا المستقيم الاخير عمود مثل ح ط على المستوى د و كان هذا العمود  
مساويا لبعد الاصل المطلوب ولكن لاجل الاثبات على انه يوجد مستقيم مساويا الى ح ط  
وواصل بين نقطتين من نقطه المستقيمين المعلومين يرسم من نقطة تقابل هذا العمود  
بالمستوى وهو التي هي نقطة ط مستقيما مثل ط ع موازيا الى ا ب فالمستقيم ط ع  
يقطع بالضرورة مستقيم ح و في نقطة مثل نقطة ع والا كان المستقيم ح و موازيا  
الى ا ب وهذا يخالف لما فرض في رأس المسئلة وحيث انه اذا أقيم من نقطة ع عمود  
مثل ع و على المستوى وهو لزم ان يكون هذا العمود موجودا في المستوى ب ح ط ع  
العمودي على مستوى وهو من الاصل فبناء على ذلك يكون المستقيم ع و متقاطعا  
مع المستقيم ا ب وحينئذ فيكون هذا المستقيم وهو ع و المساويا والموازيا الى ح ط  
هو البعد الاصل بين المستقيمين ا ب و ح و ومن المشاهد انه عمودي على كل منهما  
في ان واحد ا كونه عموديا على مستوى ح و الموازيا لهذين المستقيمين

ولاجل البرهنة على ان المستقيم ع و العمودي على كل من المستقيمين المعلومين هو في  
الحقيقة أصغر الأبعاد الواصلة بين المستقيمين المذكورين يقال من المعلوم انه اذا واصل  
بين نقطتين اختياريتين مثل م و ه من نقطه المستقيمين المفروضين بمستقيم مثل م ه  
كان

كان المستقيم الموصول خارجا عن المستوى ب ع ط ٤ مادامت نقطة ه مأخوذة غير نقطة ٤ ومن هنا يعلم ان م ه مائل بالنسبة لمستوى ٤ ه و وبناء على ذلك يكون أطول من العمود م ك المساوي الى ٤ اما في حالة ما اتحدت نقطة ه بنقطة ٤ يكون المستقيم م ٤ مائلا على المستقيم ب ا فيكون حينئذ أطول من العمود ٤ ه الذي يصير بناء على ذلك أصغر الابعاد الممكن وصاها بين نقطتين حيثما اتفقا من نقط المستقيمين المفروضين

ب ٢٢ ونجرب الآن العمليات التي لم تذكر في البند السابق الا بالطريقة النظرية بطريقة الهندسة الوصفية لتعلم حقيقتها وليظهر لنا الفرق بين العمليات المهمة الموجودة في الهندسة العادية وبين الطرق المضبوطة التي بها يتحصل في الهندسة الوصفية على نتائج معينة بالكلية في حل المسائل المتعلقة بالاشكال ذات الثلاثة ابعاد وقد أشرنا الى هذا الفرق في (بندى ٣ و ٤) فقول

ليكن (ا ب و آ ت) و (ح د و ح د) (شكل ٤٩ لوحة ١٢) هما المستقيمان المعلومان فنالحق أولا أن هذين المستقيمين غير موجودين في مستو واحد لانه مشاهد من الشكل أنهما غير متوازيين وكذلك حيث ان نقطتي تقابل مسقطيهما الرأسيتين ومسقطيهما الافقيين ليستا على مستقيم واحد عمودى على خط الارض فهما غير متقاطعين اذا قرر هذا نتخب نقطة (ح و د) من المستقيم (ح د و ح د) لنرسم منها مستقيما مثل (ح و د و ح د) موازيا للمستقيم (ا ب و آ ت) ثم نرسم اثرى المستوى المار بالمستقيمين (ح د و ح د) و (ح و د و ح د) فنجد هما عبارة عن الاثرين ٤ و ٥ و ٦ ثم نفرض نقطة مثل (ه ه ه) على المستقيم الثانى (ا ب و آ ت) وننزل منها المستقيم (ه ط و ه ط) عموديا على المستوى ٤ ه و ونبحث بمقتضى (ب ٤٦) عن نقطة تقابل هذا العمود بالمستوى ٤ ه و بواسطة استعمال المستوى ه ح ع المسقط افقيا للمستقيم (ه ط و ه ط) ثم نرسم من نقطة (ط و ط) مستقيما مثل (ط ل و ط ل) موازيا الى (ا ب و آ ت) فيقطع المستقيم (ح د و ح د) بمقتضى (ب ٤٧) في نقطة مثل (ل و ل) وبعد ذلك نرسم من نقطة (ل و ل) مستقيما مثل (ل م و ل م) موازيا الى (ه ط و ه ط) وحيث ان هذا المستقيم الممدود يلزم أيضا ان يكون متقاطعا مع المستقيم (ا ب و آ ت) فيلزم حينئذ ان تكون نقطتا م و ن موجودتين على مستقيم

واحد عمودي على خط الأرض وعلى ذلك فيكون لم  $\Gamma$  مسقطي البعد الأصغر المطلوب ثم لاجل إيجاد طول المحقق في يؤخذ بمقتضى (ب ٤٧ د) على الأفق الممدود من نقطة  $\Gamma$  بعد مثل  $\Delta$   $\Gamma = \Delta$  ويوصل المستقيم  $\Gamma \Delta$  فيكون هو الطول المحقق للبعد الأصغر المذكور

أما إذا كان المستقيمان المعلومان متوازيين فيكون البعدين هما واحد في جميع امتدادهما وللحصول عليه يكفي البحث عن البعد الأصغر بين أحدهما ونقطة حيثما اتفق من المستقيم الثاني ولا يخفى أن هذه المسئلة قد سبق حلها في (بندى ٥٧ ، ٥٨) \* (تنبيه) \* اعلم أن طريقة إيجاد البعد الأصغر بين مستقيمين غير موجودين في مستوي واحد التي ذكرناها في (بندى ٧١ ، ٧٢) هي الطريقة العمومية الممكن تطبيقها على أى مستقيمين مهما كان وضعهما ولكن قد توجد أحوال فيها يكون البعد الأصغر بين المستقيمين المعلومين معيناً من نفس معالم المسئلة قد راو وضعاً ولا يكون معيناً من معالم المسئلة لكن يمكن تعيينه بطرق أصغر من الطريقة العمومية وسند ذكر تلك الأحوال فيما سياتى بنهاية الاختصار ونعتبرها كمسائل تطبيقية يطلب من التلامذة حلها وعمل الاشكال اللازمة لها مع ذكر بعض أفكار قليلة تساعد على حلها

\*(الفصل الثالث في تغيير مستويات المسقط ومسائل تطبيقية على ما تقدم)\*

ب ٧٣ د (في نظرية تغيير مستويات المسقط) قد يتأتى أحياناً للرسم خصوصاً في الرسومات المتعلقة بفتح قطع الحجارة والأخشاب أن يضطر لاجل إيجاد بعض أجزاء المسئلة إلى الاستعانة بمستويات مسقط مساعدة خلاف مستوي المسقط اللذين يثبت عليهما معالم المسئلة المذكورة فعند ذلك يلزمه تعيين المساقط الجديدة للخطوط والنقط المألوفة بمساقطها على المستويين القديمين وقد درسنا هذه المسئلة في بعض أحوال بسيطة كما تقدم في البنود المنحصرة بين (ب ٤٧ د ، ب ٥٢ د) والآن نعود لها لاجل تمام الكلام عليها فنقول

ب ٧٤ د المعلوم نقطة مثل (١ د ١) (شكل ٥٠ لوحة ١٢) مسقطها ١ د ١ على مستوي مسقط مرزها س د س وخط أرضها هو غ ض ثم اقتضى الحال لتعويض المستوي الأفقى س د بمستواً فى آخر يرمزه بحرف س ه بحيث يكون خط أرضه هو غ ض مع توهم دوران المستوى المدكور حول خط أرضه حتى ينطبق

حسب العادة على المستوى  $\pi$  والمطلوب إيجاد مسقط هذه النقطة على مستوى  
المسقط  $\pi$  و  $\pi$

فلذلك يقال حيث أن المستوى  $\pi$  ثابت فالمسقط الرأسى لهذه النقطة يبقى ثابتا ولا  
يزال هو نقطة  $\alpha$  وأما المسقط الأفقى الجديد لهذه النقطة الذى هو  $\beta$  فلا شك أنه يلزم  
للحصول عليه أن يؤخذ على العمود  $\alpha\alpha'$  بعد مثل  $\beta$  مساو إلى  $\alpha$  وهذا أمر  
بديهي وواضح لا يحتاج إلى طول البرهان و بمثل ذلك إذا كانت موجودة نقطة أخرى  
مثل  $(\beta \text{ و } \gamma)$  فراعيه نحول مسقطها إلى  $\gamma$  و  $\beta$  بحيث أن المستقيم الفراغى  
 $(\alpha \text{ و } \gamma)$  لا يزال مسقطه الرأسى هو  $\alpha$  وأما مسقطه الأفقى الجديد فيصير عبارة  
عن  $\beta$  الموازى إلى  $\alpha\beta$

فإذا كان معلوما مستو مثل  $\alpha\beta$  بأثريه  $\alpha$  و  $\beta$  على مستوى المسقط  $\pi$  و  $\pi$   
وأريد إيجاد أثريه على مستوى  $\pi$  و  $\pi$  يقال أن أثره الرأسى لا يزال عبارة عن خط  
 $\alpha\beta$  وأما أثره الأفقى الجديد على المستوى  $\pi$  فإنه يخرج من نقطة  $\beta$  الكائنة على  
خ  $\pi$  و يصير عبارة عن  $\beta\gamma$  الموازى إلى  $\alpha\beta$  ومثل ذلك يجرى فى حالة ما إذا  
أريد تعويض المستوى الرأسى  $\pi$  بمستوى آخر موازله

بمثال وانفرض الآن أن المستويين الأصليين  $\pi$  و  $\pi'$  اللذين خط أرضهما  
هو خ  $\pi$  (شكل ٥١ لوحة ١٢) قد حفظنا أحدهما وهو الأفقى  $\pi$  واستعوض  
المستوى الثانى وهو الرأسى  $\pi'$  بمستو مثل  $\pi$  رأسى أيضا لكن خط أرضه على  
المستوى  $\pi$  مستقيم حيثما اتفق خ  $\pi$  الذى يتوهم دوران المستوى  $\pi'$  حوله حتى  
ينطبق على المستوى  $\pi$  فعند ذلك كل مستقيم كالمستقيم الذى كان مسقطاه الأصليان  
هما  $\alpha$  و  $\beta$   $\alpha\beta$  يحفظ بالضرورة مسقطه الأفقى  $\alpha\beta$  وأما مسقطه الرأسى الجديد  
على المستوى  $\pi$  فيكفى لإيجاده أن ينزل من نقطتي  $\alpha$  و  $\beta$  عمودان على خط  
الأرض الجديد خ  $\pi$  ثم يؤخذ الارتفاعان

$$\alpha\alpha' = \beta\beta' \quad \alpha\beta = \alpha'\beta'$$

فيمحصل لنا المسقط الرأسى الجديد وهو  $\Gamma \Delta$  على المستوى  $\Gamma \Delta$  المنطبق  
 وأما إذا كان المعلوم مستويا مثل  $\Delta \Gamma$  بانريه  $\Delta \Gamma$  و  $\Delta \Gamma$  على المستويين الأصليين  
 فن المعلوم ان أثره الافقى  $\Delta \Gamma$  يبقى بالضرورة على أصله بحيث اذا مذهب حتى يتلاقى مع  
 خط الارض الجديد  $\Delta \Gamma$  فى نقطة مثل  $\Delta$  فان هذه النقطة الاخيرة تكون  
 بالضرورة نقطة من الاثر الرأسى للمستوى المعلوم  $\Delta \Gamma$  على المستوى  $\Gamma \Delta$  وأيضا اذا  
 تصورنا قيام المستوى المذكور  $\Gamma \Delta$  فى وضعه الرأسى فانه يقطع المستوى الرأسى  
 الاصلى  $\Delta \Gamma$  فى المستقيم الرأسى  $\Delta \Gamma$  الذى هو مقابل للمستوى  $\Delta \Gamma$  فى نقطة  $\Delta$   
 وحينئذ منطبق المستوى  $\Gamma \Delta$  حول خط أرضه  $\Delta \Gamma$  فان هذا الرأسى  $\Delta \Gamma$   
 ينطبق على مستقيم مثل  $\Delta \Gamma$  عمودى على محور الدوران  $\Delta \Gamma$  وتكون نقطة  $\Delta$   
 نقطة من خط تقاطع المستوى  $\Delta \Gamma$  بالمستوى  $\Gamma \Delta$  أعنى ان نقطة  $\Delta$  تكون نقطة  
 من اثر المستوى  $\Delta \Gamma$  على المستوى الرأسى  $\Gamma \Delta$  وبناء عليه يكون هذا الاثر عبارة  
 عن المستقيم  $\Delta \Gamma$

بـ ٧٦ الحالة التى تقدمت فى البند السابق وان كانت هى فى الحقيقة الحالة النافعة دون  
 غيرها لکن لاجل ان نبين ان المسئلة قابلة للحل بوجه عمومى التزمنا بدكر حل المسئلة  
 الآتية

(شكل ٥٢ لوحه ١٣) اذا فرض ان مستويي المسقط الاصلين هما  $\Delta \Gamma$  الافقى  
 و  $\Delta \Gamma$  الرأسى وانه صار تطبيق أحدهما على الآخر بتدويره حول خط أرضه  $\Delta \Gamma$  ما  
 خ  $\Delta \Gamma$  ومعلوم نقطة فراغية بمسقطيه  $\Delta \Gamma$  و  $\Delta \Gamma$  على هذين المستويين والمطلوب إيجاد  
 مسقطى هذه النقطة بعينها على مستويين جديدين مثل  $\Delta \Gamma$  و  $\Delta \Gamma$  متعامدين على  
 بعضهما أيضا وأثر أولهما وهو  $\Delta \Gamma$  على المستويين الأصليين هما  $\Delta \Gamma$  و  $\Delta \Gamma$  اما خط  
 أرضهما أعنى فاصلهما المشترك فهو المستقيم المسقط افقيا على  $\Delta \Gamma$  ولا حاجة لاعطاء  
 مسقطه الرأسى اذ يمكن الحصول عليه بالسهولة لان خط الارض المذكور موجود  
 فى المستوى  $\Delta \Gamma$

فإن ذلك يمرر بنقطة ( ب د ) مستوى قطاع عمودي على هـ فيكون بالضرورة رأسيا ويكون اثره الافقي عبارة عن المستقيم ب هـ أما اثره الرأسى فهو المستقيم و هـ العمودى على خ س وهذا المستوى يقطع المستوى م هـ فى مستقيم اذا طبق مع مستوى القطاع حول ذ وانطبق بالضرورة على هـ أما نقطة ( ب د ) فانها تنجرع مستوى القطاع وتأخذ موضعا مثل ت وللحصول على هذا الوضع بقام من نقطة ب عمود على محور الدوران مثل ب ت = ط ت وحينئذ اذا أنزل من نقطة ت عمود مثل ت ق على هـ وتصورنا قيام مستوى القطاع فى وضعه الاصلى رأينا ان نقطة ق هـ مسقط نقطة ( ب د ) على المستوى م هـ أى على المستوى س لىكن حيث انه لاجل استعمال مستوى المسقط س لابد من تطبيقه على ورقة الرسم فننتصردورانه حول هـ حتى ينطبق على المستوى الافقى الاصلى وبذلك تأتى نقطة ق فى الوضع ب ويبقى علينا حينئذ ان نبحث بعد الدوران عن وضع خط الارض المنسقط افقيا على خ س والموجود فى المستوى م هـ ولذلك يمد من نقطة ض عمود غير محدود على محور الدوران هـ ويرسم قوس دائرة بنصف القطر هـ ض فيعلم ان نقطة ض هـ منطبق نقطة ( ض و ) وعلى هذا يكون خط خ ض هـ ومنطبق خط الارض الجديد وأخيرا اذا تصورنا ان مستوى المسقط س دار حول خ ض حتى انطبق على المستوى الافقى كفى لايجاد المسقط الثانى لنقطة ( ب د ) عليه ان يمد من نقطة ب عمود غير محدود على خ ض وان يؤخذ البعد ل ب مساويا الى ت ب وعلى هذا تكون نقطتا ب د هما مسقطا نقطة ( ب د ) على مستويي المسقط س و س الجديدين المنطبقين على بعضهما حول خط أرضهما خ ض

\* (فى بعض مسائل تطبيقية على ما تقدم) \*

بـ ٧٧ هذه المسائل يطلب حلها من التلامذة لاجل تمرينهم وتدريبهم على فهم القواعد المتقدمة ولا بأس من مساعدة المعلم لهم فيما يتعسر عليهم حله

(المسئلة الاولى) المعلوم نقطتان مثل ( ا د ) ( ب د ) (شكل ٥٣ لوح ١٣٤)

ليكن أحدهما وهي ( ١ ، ١ ) فوق المستوى الأفقى للمسقط والاخرى تحته  
والمطلوب إيجاد حقيقة البعد الواصل بينهما بجميع الطرق التى تقررت فى ( بند ٢٦  
و ٢٧ ، ٢٨ )

(المسئلة الثانية) المطلوب تمثيل مستويين مستقيمين معلومين فى جميع الاحوال الآتية  
(أولاً) حينما يكون أنرا أحدهما غير موجودين فى حدود الرسم  
(ثانياً) حينما يكون المستقيمان الفراغيان المعلومان متقاطعين فى نقطة من خط الأرض  
(ثالثاً) حينما يكون كل من المستقيمين المعلومين موازياً الى خط الأرض  
(رابعاً) حينما يكون احدهما مستقيمين المعلومين موازياً للمستوى الأفقى والمستوى الرأسى  
(المسئلة الثالثة) المطلوب مدم مستقيم من نقطة معلومة بحيث يكون قاطعاً لمستقيمين  
معينى الوضع

لأجل حل هذه المسئلة يكفي ان يمرر بكل واحد من المستقيمين المعلومين والنقطة  
المعلومة مستوئخط تقاطع المستويين المتحاذين يكون هو المستقيم المطلوب  
أو يمرر بأحدهما وبالنقطة مستو واحد ثم نبحث عن نقطة تقابل هذا المستوى  
بالمستقيم الثانى ويوصل منها الى النقطة المعلومة بمستقيم فيكون هو المستقيم المطلوب  
(المسئلة الرابعة) المطلوب تمثيل مستويين مستقيمين معلومين بحيث يكون عمودياً على مستوي  
معلوم أيضاً

(المسئلة الخامسة) المعلوم نقطة والمطلوب مدم مستوئها بحيث يكون عمودياً على  
مستويين معلومين أيضاً

(المسئلة السادسة) المطلوب إيجاد مركز ونصف قطر الدائرة التى تمر بثلاث نقط  
معلومة بمساقطها

(المسئلة السابعة) المطلوب تعيين مسقطى الخط المئصف للزاوية الواقعة بين مستقيمين  
معلومين بمساقطهما

(المسئلة الثامنة) المطلوب تمثيل مستقيم من نقطة معلومة بحيث يكون صانعاً مع مستقيم  
آخر معلوم بمسقطيه زاوية معلومة أيضاً

(المسئلة التاسعة) المطلوب إيجاد المسقط الرأسى لمستقيم من بعد معرفة نقطة منه  
ومسقطه الأفقى وزاوية ميله على المستوى الأفقى

(المسئلة العاشرة) المطلوب إيجاد الزاوية الزوجية الواقعة بين مستويين معلومين

بطريقة غير الطريقة المتقدمة في ٢٩

ملخص المحل هو ان يفرض داخل الزاوية الزوجية المذكورة نقطة وينزل منها عمود على أحد المستويين وعمود على المستوى الآخر ويبحث عن الزاوية الواقعة بين العمودين فتكون مكملة للزاوية المطلوبة وعلى الطالب ان يعمل الرسم اللازم لهذه المسئلة طبقا لهذا المحل الملخص

(المسئلة الحادية عشر) المعلوم مستقيم موجود داخل مستو معلوم بأثريه والمطلوب تمثيل مستوي بهذا المستقيم بحيث يكون صانعا مع المستوى الاول زاوية معلومة هـ

\*(الفصل الرابع)\*

(في المسائل المختصة بمحل الزاوية المجسمة الثلاثية)

بـ ٧٨ كل زاوية مجسمة ثلاثية مثل الزاوية س هـ ا ب د (شكل ٤ هـ لوحة ١٣) تشتمل على ثلاثة زوايا مستوية وثلاث زوايا زوجية أما الثلاث الاولى فهي الزوايا المستقيمة الاضلاع المتكونة بين أحرف الزاوية المجسمة وبعضها وأما الثلاث الأخر فهي عبارة عن زوايا ميل الأوجه على بعضها ومتى علم ثلاث زوايا من هذه الست أمكن دائما تعيين الزوايا الباقية بحيث ينشأ عن ذلك ست مسائل متميزة

لانتادار من بابا الحروف ا ب د ح الى الزوايا الزوجية التي أحرفها هي على التناظر س هـ ا ب د س هـ د وبالحروف ا ب د ح الى الزوايا المستوية أعني الأوجه المقابلة الى هذه الزوايا الزوجية ظهرت لنا الاحوال الستة الآتية

- (أولا) ان يكون المعلوم الثلاثة أوجه أعني الزوايا المستوية  
 $\begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{د} & \text{ب} & \text{ح} \\ \hline \end{array}$
- (ثانيا) ان يكون المعلوم وجهين والزاوية الزوجية المنحصرة بينهما  
 $\begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{د} & \text{ب} & \text{ح} \\ \hline \end{array}$
- (ثالثا) المعلوم وجهان والزاوية الزوجية المقابلة لاحدهما  
 $\begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{د} & \text{ب} & \text{ح} \\ \hline \end{array}$
- (رابعا) المعلوم زاويتان زوجيتان وأحد الوجهين المقابلين لهما  
 $\begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{د} & \text{ب} & \text{ح} \\ \hline \end{array}$
- (خامسا) المعلوم زاويتان زوجيتان والوجه المنحصر بينهما  
 $\begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{د} & \text{ب} & \text{ح} \\ \hline \end{array}$
- (سادسا) المعلوم الثلاث زوايا الزوجية  
 $\begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{د} & \text{ب} & \text{ح} \\ \hline \end{array}$

فهذه الستة احوال هي الناشئة من أخذ توافق الست زوايا  
 $\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \text{د} & \text{ب} & \text{ح} & \text{د} & \text{ب} & \text{ح} \\ \hline \end{array}$

ثلاثية لئلا يمكن من بعد حذف التوافق المشتركة



والثلاثة احوال الاخيرة من هذه الست يمكن تحويلها الى الثلاثة الاول وذلك باستعمال  
 الزاوية المجسمة الثلاثية المكاملة للزاوية المجسمة المثلثية  $\alpha$  هـ ا ب بيا ذلك  
 بهـ د اذا اخذت نقطة س داخل لزاوية المجسمة الثلاثية س  
 (شكل ١٣) وأنزل منها ثلاثة عمود مثل س آ و س ب و س ج على الثلاثة  
 أوجه ثم اعتبرنا لاجل زيادة الايضاح ان المستوى ب س ج افقى والضلوع س ا  
 كـ مستقيم موجود فوق هذا المستوى وخارج عنه فانه يتكون عن ذلك زاوية مجسمة  
 ثلاثية أخرى س ا ح فها هي المستقيم ا ر ا س آ والمستقيمان س ب و س ج  
 العموديان على الوجهين ا س ج و ا س ب كل على نظيره وهذه الزاوية المجسمة  
 الثلاثية الجديدة هي ما تسمى بالزاوية المكاملة للزاوية الاصلية لان اوجهما وزواياها  
 الزوجية مكاملة للزوايا الزوجية ولا وجه الزاوية الاصلية المذكورة ولعكس بالعكس  
 ولبرهنة على ذلك نرسم بالحروف آ د ر د ح لزاويا الزوجية المنحصرة بين  
 الواجه المتقاطعة في المستقيمت س آ و س ب و س ج وبالحروف آ د ب د ح  
 الى الواجه المقابلة لهذه الاضلاع فتجد ان المستوى آ س ب العمودى على كل من  
 الوجهين ب س ج و ا س ج يقطعهما في مستقيمين مثل آ هـ و ب هـ يكونان  
 بنفسهما عموديين على س ج وبناء على ذلك تكون زاوية آ هـ ب معيارا للزاوية  
 الزوجية د ومن حيث أن الشكل الرباعي س آ هـ ب فيه زاويتان قائمتان وهما  
 آ د ب فحينئذ تكون الزاويتان الاخرتان متساويتين ويكون

$$\alpha + \beta = 180^\circ \quad \text{أعني ان} \quad \alpha + \beta = 180^\circ$$

$$\beta + \gamma = 180^\circ \quad \text{وبمثل ذلك يبرهن على أن}$$

$$\alpha + \gamma = 180^\circ \quad \text{وأن}$$

من الشكلين الرباعيين س آ د ر و س ب د ر الناشئين عن تقاطع الوجهين  
 آ س د و س ب ج بأوجه الزاوية المجسمة الثلاثية س ج وحينئذ فيثبت المطلوب من  
 ان أوجه الزاوية المجسمة س هي الزوايا المكاملة للزاويا الزوجية من الزاوية  
 المجسمة س

بهـ د فاذا اعتبرنا الآن الزوايا الزوجية من المجسمة الثلاثية س رأينا ان الوجهين

تس آ د تس آ العمودين على المستوى س س د قاطعان له في المستقيمين  
آ هـ آ د وبناء على ذلك تكون الزاوية المستوية د آ هـ معيارا للزاوية الزوجية  
آ وحيث كان الوجه آ تس ت عموديا على س د والوجه آ س د عموديا على  
س د فتكون بالضرورة زاويتا د و هـ من الشكل الرباعي س د آ هـ قائمتين  
وبناء على ذلك تكون زاويتاهما الاخرى ان متكاملتين وتكون زاوية

$$د آ هـ + د س هـ = ١٨٠ \quad \text{أو} \quad آ + د = ١٨٠$$

$$١٨٠ = ب + ج \quad \text{وبمثل ذلك يبرهن على ان}$$

$$١٨٠ = د + هـ \quad \text{وان}$$

وذلك من الشكلين الرباعين س هـ ت و د س د و ومن ذلك يثبت المطلوب حينئذ  
من ان الزوايا الزوجية من الزاوية المجسمة الثلاثية س متكاملة لوجه الزاوية المجسمة  
س بل يمكن ان يقال ان الزاوية المجسمة س نفسها متكاملة للزاوية المجسمة س  
بذلك يلزم ان يلاحظ انه اذا جعلت نقطة س التي هي رأس الزاوية المجسمة مركزا  
ورسمت كرة بنصف قطر حيثما اتفق مثل س ا فان سطح هذه الكرة يتقاطع مع أوجه  
هذه المجسمة في ثلاثة أقواس من دوائر عظام كالأقواس ا ب و ب د و د ا التي تكون  
عنها مثلث كروي اضلاعه هي معايير للزوايا المستوية ا ب د و د ا ب و ب د ا عبارة  
عن زوايا مثل أوجه الزاوية المجسمة الثلاثية على بعضها بعض أعني عبارة عن مقادير  
الزوايا ا ب د و

ومن ذلك يرى أن طرق انشاء الزاوية المجسمة الثلاثية من بعد معرفة ثلاثة اجزاء من  
اجزائها الستة لم تكن سوى حلول رسمية للمسائل التي تمحل في علم حساب المثلثات الكروية  
بحلول حسابية وهذا مصادق لما ذكرنا في بندي (١ و ٢) من ان المسائل الرياضية  
يمكن حلها اما بالرسم واما بالجبر والحساب

وأبضا اذا نقلنا الزاوية المجسمة س الى المركز س فان أوجهها تتقاطع مع سطح الكرة  
في ثلاثة أقواس يتسكون عنها مثلث كروي والمثلث الكروي المكمل او القطبي للمثلث  
ا ب د وهذا المثلث القطبي يستعمل أيضا في علم حساب المثلثات الكروية للمساعدة  
على حل المثلث الاول

به ٥٨٤ ولنرجع الآن الى حل المسائل الستة التي ذكرناها في ٥٧٨ ونلاحظ أنه اذا علمت الثلاث زوايا الزوجية  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  من الزاوية المجسمة الثلاثية  $\alpha\beta\gamma$  أمكن بالسهولة تعيين الزوايا المكملية لها وبمقتضى ما تقرّر في ٥٧٩ تكون هذه الزوايا المكملية عبارة عن الزوايا المستوية أعني الوجة  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  لزاوية مجسمة أخرى  $\alpha\beta\gamma$  وحينئذ يرى أنه اذا أمكن تعيين الزوايا الزوجية  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  من الزاوية المجسمة  $\alpha\beta\gamma$  المذكورة بواسطة معلومية أوجهها المتقدمة وهي  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  أمكن بالسهولة أيضا تعيين الوجة  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  للزاوية المجسمة الأصلية لأن هذه الوجة ليست الا الزوايا المكملية للزوايا الزوجية  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  من المجسمة الثلاثية  $\alpha\beta\gamma$  ومن ذلك يتضح ان الحالة السادسة من الاحوال الستة المتقدمة في ٥٧٨ تؤول الى الحالة الاولى منها وان الحالة الخامسة تؤول بالمثل الى الثانية والحالة الرابعة الى الحالة الثالثة واذن اذا حلت الثلاث حالات الاول تحل الثلاثة الاخرى أو بالعكس فلنشتغل الآن حينئذ بحل الثلاث مسائل الاولى فنقول

به ٥٨٣ (الحالة الاولى) المعلوم الثلاثة أوجه  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  (شكل ٥٥ لوحه ١٣) من زاوية مجسمة ثلاثية والمطلوب تعيين زواياها الزوجية الثلاث  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  لذلك نأخذ نقطة حيثما اتفق مثل  $\alpha$  في المستوى الافقى ونقدم منها الاربعه المستقيمات  $\alpha\beta$  و  $\alpha\gamma$  و  $\beta\gamma$  و  $\alpha\delta$  بحيث تكون صانعة مع بعضها ثلاث زوايا مساوية للثلاثة أوجه المعلومه  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  كما هو مشاهد في الشكل باعتبار أن أحدها هو الوجه  $\alpha$  موجود في الاصل على المستوى الافقى وأن الوجهين الآخرين  $\beta$  و  $\gamma$  قد دارا على التناظر حول  $\alpha\delta$  و  $\beta\gamma$  حتى انطبقا مع الوجه الاول على المستوى الافقى

ثم نأخذ على المستقيمين  $\alpha\beta$  و  $\alpha\gamma$  نقطتين مثل  $\beta$  و  $\gamma$  متساويتى البعد عن نقطة  $\alpha$  ونقول لاشك انه يكفي انرجيع هذه الزاوية المجسمة المنفصلة الى حالة تركيبها الاصليه أن ندور الوجهين  $\alpha\beta$  و  $\alpha\gamma$  حول مستقيمي  $\alpha\beta$  و  $\alpha\gamma$  باعتبارهما محورى دوران حتى ينطبقا المستقيمان  $\alpha\beta$  و  $\alpha\gamma$  على بعضهما في الفراغ ويصيرا مستقيما واحدا وهو الحرف الثالث من أحرف الزاوية المجسمة ولا يخفى

أن نقطتي م و م ترسمان في أثناء هذه الحركة قوسين مستويين هما عموديان على محوري الدوران سب و سه و ينسقطان أفقياً على المستقيمين م هـ م و م و م المتزايين عمودياً على سب و سه من نقطتي م و م لكن حيث كانت هاتان النقطتان متساويتى البعد عن نقطة سه فعندما يتعدا المستقيمان سب و سه أ ببعضهما تتعدا بالضرورة هاتان النقطتان وتصبحان نقطة واحدة في الفراغ مسقطها على المستوى الأفقي بوجد بالضرورة في نقطة م التي هي نقطة تقاطع مسقطي القوسين اللذين رسمتهما النقطتان م و م وبناء على ذلك يكون المستقيم م م و م مسقط الحرف الثالث من الزاوية الخمسة

وأيضاً المستوى الرأسي و م العمودي على سب و ينبغي أن يقطع الوجهين المارين بهذا الحرف في مستقيمي و م و م اللذين اذارداً إلى وضعهما الحقيقي صنعاً بينهما زاوية مساوية لزاوية ميل هـ هـ الوجهين على بعضهما وتكون منهما ومن الرأسى المقام من نقطة م مثل قائم الزاوية وحينئذ إذا طبق هذا المثلث على المستوى الأفقي بتدويره حول قاعدته و م بان أقيم على هذه القاعدة عمود مثل م و غير محدود ثم حدد هذا العمود بمجعل نقطة و مركزاً ورسم القوس م و بنصف القطر و م فهذا القوس يتقاطع مع العمود المتقدم في نقطة مثل و بحيث لو وصل منها إلى و بالمستقيم و و لكانت زاوية و و م المستوية معياراً للزاوية الزوجية و المبحوث عنها

وكذلك مستوى هـ م الرأسى يقطع الوجهين المارين بالحرف سب في مستقيمي هـ م و م اللذين اذارفاً إلى وضعهما الحقيقي صنعاً بينهما زاوية مستوية هي معيار الزاوية الزوجية ب و بما أن هذين المستقيمين صانعا أيضاً مع الرأسى م مثلث قائم الزاوية هما قاعدته ووتره يمكن بالسهولة حينئذ إيجاد المنطبق و هـ لهذا المثلث بحيث تكون زاوية م هـ و هي معيار زاوية ب الزوجية و بما ينبغي ملاحظته أيضاً هو أنه يجب أن يكون الرأسان م و و م و متساويين لأن كلا منهما يدل على شئ واحد وهو ارتفاع النقطة الوحيدة من الحرف سب التي تنسقط على نقطة م

ولاجل الحصول على معيار الزاوية الزوجية الثالثة ا ب م رسم تقاطع عمودي على الحرف سب من نقطته المنسقة على نقطة م والمنطبقة من جهة على م ومن الجهة

الآخرى على م فهذا المستوى يقطع الوجهين الجانبيين في مستقيمين مثل م ح و م ط  
يكونان على التناظر عموديين على س آ و س آ و بناء على ذلك يكون خط تقاطع هذا  
المستوى مع الوجه ح س ب هو عبارة عن المستقيم ح ط الذي يلزم أن يكون  
بمقتضى بند ٥٣ عموديا على المسقط الأفقي للحرف الثالث وهو س ا وحيث أنه فلورسم  
مثلث م ح ط بواسطة الثلاثة خطوط ح م و ح ط و ط م لكانت زاويته التي  
في رأسه م هي بالضبط معيار الزاوية الزوجية التي حرفها س ا

ولملاحظ أيضا أن هذا المثلث قبل تطبيقه حول ح ط كانت رأسه م موجودة على  
نقطة الحرف س ا المنسقة على نقطة م ولما كان محور الدوران ح ط المذكور  
عموديا على المستوى الرأسي س ا كما تقدم لزم أن لا تخرج نقطة م عن هذا المستوى  
وبناء على ذلك يجب أن يكون منطبق هذه النقطة موجودا على امتداد المستقيم س م ا  
وهذا تحقيق للعمل يجب ملاحظته

بعد العمليات المتقدمة يمكن إجراؤها أيضا في حالة ما تكون الثلاث زوايا  
ا د ب و د ح كها أو بعضها قائمة وانما لاجل أن تكون المسئلة ممكنة المحل يلزم  
دائما استيفاء الشرطين الآتيين أولا أن يكون مجموع الثلاث زوايا ا د ب و د ح  
أقل من أربع زوايا قوائم وثانيا ينبغي أن تكون أكبر هذه الزوايا أصغر من مجموع  
الزاويتين الأخريين

لأنه ان لم يتوفر هذين الشرطين من معالم المسئلة شوه ديا بسهولة ان العمليات  
الرسمية توصلنا الى وترين للثلثين د م و د ه م و يكونان أقصر من قاعدتيهما وبهذا  
يستحيل رسم هذين المثلثين بخلاف ما اذا توفر الشرطان المتقدمان فانه يمكن تكوينهما  
بسهولة وتكون معالم المسئلة بناء على ذلك كافية لتكوين الزاوية المجسمة

بشد (في رد الزاوية الى الافق) كثيرا ما يحتاج في عملية رفع المستويات أعني في رسم  
الخريطة الطبوغرافية الى رد زاوية معلومة الى الافق أعني إيجاد المسقط الأفقي لزاوية مثل  
ا معلوم مقدارها ومعلوم أيضا الزاويتان الواقعتان بين ضلعيهما وبين الخط الرأسي  
النازل من رأسها اللتين نرسمهما بحرفي د ح ولذلك نقول لو تصورنا زاوية مجسمة  
ثلاثية أحرفها هي هذا الخط الرأسي وضلع الزاوية المعلومة ا رأينا ان الثلاث زوايا

المستوية | ر ب ر ح أعني أوجه هذه الزاوية المجسمة معاومة ويكون حينئذ  
المسقط المطلوب كتابة عن الزاوية المستوية التي هي معيار للزاوية الزوجية | المقابلة  
للوجه | والمختصرة بين الوجهين الرئيسيين ومن ذلك يفهم أن هذه المسئلة داخلية فمن  
مسئلة بـ ٨٣ ويمكن حلها كما حلت المسئلة المذكورة لكن لا يكون أحد أحرف  
الزاوية المجسمة ه وفي هذه الحالة خط رأسى وهذا مما يعطى الشكل وضعه أبسطا لزم  
حل هذه المسئلة حلا بسيطا خاصا بها

(شكل ٦٥ لوحة ١٤) ولذلك نرسم في المستوى الرأسي للمستقط أوفى أى مستوقاً مستقيمين يكونان صانعين مع الخط الرأسي س أ المأخوذ بالاختيار زاويتين مثل س ب و س ح بحيث تكون زاوية س ب ح و زاوية س ح ب ثم ندور هذه الزاوية الأخيرة أعنى س ح حول الرأسى س أ مع حفظ مقدارها على حالته الأولى الى أن يصير ضلعها المتحرك س ح صانعاً في الفراغ مع الضلع الثابت س ب زاوية مساوية للزاوية المعلومة وبذا تصير الزاوية المعلومة موجودة بالضبط في وضعها المقرر لها من رأس المسئلة وحينئذ يسهل علينا إيجاد مسقطها الأفقى ومن حيث أنه في أثناء هذه الحركة الدورانية حول س أ ترسم نقطة ح التى هى أثر الضلع المتحرك قوس الدائرة ح د الذى مركزه نقطة أ ونسير عليه الى أن نقف في نقطة منه كنقطة ح بحيث يكون بالضرورة بعدها عن النقطة الثابتة ب قاعدة ثلث ضلعاها الآخران مستقيمان مساويان الى س ب و س ح والزاوية الواقعة بينهما تساوى زاوية أ وحينئذ لو رسم على المستوى الرأسى زاوية مثل ب س ح = أ وأخذ البعد س د = س ح لكان المستقيم ب ح عبارة عن البعد الذى نوهنا عنه فإذا نقلنا هذا البعد بواسطة قوس دائرة وجعلناه من ب الى ح علم لنا الوضع د الذى ينبغي أن يقف عنده أثر الضلع المتحرك س ح وبتاء على ذلك يتضح أن هذا الضلع يصير بعد الحركة منسقطاً أفقياً على أ د ومن حيث أن الضلع الثابت س ب منسقط على أ ب فيؤخذ من ذلك أن زاوية أ الفراغية منسقطه على زاوية ب أ د وهذا المسقط قد يكون بالضرورة أكبر أو أصغر من الزاوية الأصلية أ وهو الذى يجب أخذه واستعماله في الخريط الطبوغرافية بدلا عن الزاوية الفراغية أ لان



بـ (الحالة الثالثة) المعلوم وجهها  $\Gamma$  و  $\Delta$  من زاوية مجسمة ثلاثية والزاوية

الزوجية  $\Delta$  المقابلة لأحدهما والمطلوب تعيين الأشياء الباقية منها

(شكل ٥٨ لوحة ١٤) لنفرض كما في الحالة المتقدمة أن زاويتي  $\Delta$  و  $\Gamma$   $\equiv \Delta$   $\Gamma$

و  $\Delta$   $\Gamma$  هما الوجهان المعلومان في حالة انطباق على المستوى الأفقي وتصور

مرور مستوي رأسي عمودي على الحرف  $\Delta$  من نقطة حيثما اتفق منه كنقطة  $\Delta$

مثلا وليكن المستوى المذكور هو  $\Delta$  وبعد أن نعتبره منطبقا على المستوى الأفقي

نرسم الزاوية  $\Delta$   $\Gamma$  فاذا تصورنا بعد ذلك قيام هذه الزاوية ورجوعها إلى وضعها

الأصلي وتوهمنا تمثيل مستوي غير محدود بالمستقيمين  $\Delta$  و  $\Gamma$  دل ذلك المستوى

على وضع الوجه المجهول من المجسمة بحيث لم يبق علينا إلا جعل تركيب هذه المجسمة سوى

أن ندور الوجه  $\Delta$   $\Gamma$  حول  $\Delta$  حتى يصير الحرف  $\Delta$   $\Gamma$  موجودا في المستوى

$\Delta$  وفي أثناء هذا الدوران لا تخرج نقطة  $\Delta$  المفروضة على الحرف المتحرك عن

المستوى الرأسي  $\Delta$   $\Gamma$  المار بنقطة  $\Delta$  والعمودي على محور الدوران  $\Delta$  وبناء عليه

فنقطة  $\Delta$  تقف على خط تقاطع المستوى الرأسي  $\Delta$   $\Gamma$  مع المستوى الغير المحدود  $\Delta$   $\Gamma$

وبما أن خط التقاطع المذكور لم يكن سوى المستقيم الخارج من نقطة  $\Delta$  لكونها أثره

الأفقي والمقابل للخط الرأسي  $\Delta$   $\Gamma$  في نفس نقطة تقاطع الرأسي المذكور مع المستقيم

$\Delta$   $\Gamma$  بعد رفعه إلى وضعه الحقيقي وحينئذ فلا جمل تعيين ارتفاع نقطة التقاطع

المذكورة عن المستوى الأفقي بقام المستقيم  $\Delta$   $\Gamma$  عموديا على  $\Delta$   $\Gamma$  ثم ينقل البعد

$\Delta$   $\Gamma$  على زاوية قائمة مع  $\Delta$   $\Gamma$  بالابتداء من نقطة  $\Delta$  إلى نقطة  $\Delta$  متلافا واصل بعد

ذلك المستقيم  $\Delta$   $\Gamma$  لكان هو خط التقاطع الذي ذكرناه وهذا هو المستقيم الذي

يجب أن تقف عنده نقطة  $\Delta$  المأخوذة على الحرف المتحرك  $\Delta$   $\Gamma$  عندما يشغل

المستوى  $\Delta$   $\Gamma$  وضعه الحقيقي في الفراغ وعلى هذا إذا رسم بنصف القطر  $\Delta$   $\Gamma$  قوس

دائره يقطع  $\Delta$   $\Gamma$  في نقطة  $\Delta$  التي تكون بالضرورة نقطة من الحرف الثالث  $\Delta$   $\Gamma$

موجودة في المستوى  $\Delta$   $\Gamma$  فيسهل حينئذ تعيين مسقطها الأفقي وهو  $\Delta$

ثم نلاحظ الآن أن نقطة  $\Delta$  الموجودة في المستوى الرأسي  $\Delta$   $\Gamma$  هي من نقط مستوي

الوجه المجهول وأن هذه النقطة لا يتغير بعدها عن نقطتي  $\Delta$   $\Gamma$  إذا دار المستوى

المذكور حول الحرف  $\Delta$   $\Gamma$  لينطبق على المستوى الأفقي وذلك لأن نقطتي  $\Delta$   $\Gamma$   $\Delta$   $\Gamma$



موجودتان على محور الدوران ولا يكون هـ ذين البعدين مساويين في الحقيقة الى  
م ح ر س و فلورسم حينئذ يجعل هذين البعدين نصف قطر في قوسا اثنتين كانت  
نقطة تقاطعهما وهي و منطبقا للنقطة ح وبناء عليه يكون الوجه المجهول عبارة  
عن الوجه و س ب ولا يخفى انه متى تعين هـ هذا الوجه آلت المسئلة الى مسئلة بـ ٨٣  
الذي بمقتضاه يمكن ايجاد الاجزاء الباقية المجهولة من المجسمة الثلاثية

وكان يمكن أيضا ايجاد المنطبق و لنقطة ح بتقاطع احد القوسين المتقدمين مع المستقيم  
و المنزل عموديا على محور الدوران س ب من المسقط الافقي و لنقطة ح  
بـ ٨٤ و الاحظ ايضا أن القوس المرسوم بنصف القطر و و يقطع دائما المستقيم  
م في نقطتين مثل ح ر ع بحيث ان الوجه آ س ح يمكنه ان يأخذ عند تدويره حول  
ح س وضعين اثنين يكون الحرف س آ في كل وضع منهما موجودا في المستوى الغير  
المحدود س عـ أو س م في أحدهما والوضعين تقف نقطة و عند نقطة ح  
وفي الوضع الثاني تقف عند ح وبناء على ذلك اذا طبقت هـ هذه النقطة الاخيرة حول  
س ب كما طبقت النقطة الاولى حوله انتقلت الى نقطة و و حينئذ فيكون الوجه و س ب  
هو مقدار الوجه الثالث المجهول وعلى ذلك يرى أنه يوجد زاويتان محتملتان ثلاثيتان  
مختلفتان يمكن تركيبهما بواسطة المعاليم الموجودة وهي ا ب ر ب و هذه الحالة  
مشابهة بالكتابة فلما يحصل عند ما يراد رسم المثلث المستقيم الاضلاع من بعد معرفة  
ضلعين من اضلاعه والزاوية المقابلة لأحدهما

واني لا ظن أن الامر ليس محتاجا لان أزيد على ذلك قولي انه اذا لم يقطع القوس المرسوم  
بنصف القطر و و المستقيم م في نقطتين بل كان مماسا له في نقطة واحدة فلا يكون  
للمسئلة سوى حل واحد وأنها تكون مستحيلة الحل اذا لم يتقاطع هذا القوس بالكتابة  
مع المستقيم م ب أن كان لا قاطعا ولا مماسا له

ومع ذلك ينبغي أن يلاحظ انه يجب اهمال الحل الثاني اذا وقعت نقطة ح على المستقيم  
م في تحت المستقيم م و أعني في حالة ما يكون القوس و ع قاطعا للمستقيم م في تحت  
المستوى الافقي (وهذا يفرض ان المطلوب رسم الزاوية ب المعلومة فوق المستوى  
الافقي لا تحتها سواء كانت حادة أو منفرجة) لاننا اذا اعتبرنا الحل الذي تقع فيه  
نقطة ح في تحت المستوى الافقي رأينا أن الزاوية المجسمة الحادة مكونة بواسطة  
الوجهين ا ب ر و زاوية زوجية مكملية لزاوية ب و حيث ان هذه الزاوية معلومة

هنا بالرسم لا يمكن حثها فلا يمكن حينئذ ان يحصل فيها أدنى شك ولا شبهة من جهة مقدارها الحقيقي وبناء على ذلك يعلم أنه ليس من الجائز اعتبار الزاويتين ب و هـ - ا ب على حد سواء بدون تفريق بينهما بل الواجب ان تميزا حدهما عن الاخرى لان المجسمة الثلاثية الناشئة عن اعتبارا حدهما متخالف التي تنشأ عن اعتبار الاخرى ولهذا السبب أيضا ينبغي اجمال الحامين معا والجزم بأن المسئلة مستحيلة الحل بواسطة المعاليم المحسالية اذا وقعت كل من نقطتي ع د ع تحت الافقي م و وبالجمله فان ذلك لا يحصل الا اذا كانت الزاوية الزوجية ب منفردة

بـ ٨٩ (تنبيه مهم) هو اننا وان أورينا في بـ ٨٢ انه يمكن تحويل الثلاثة احوال الاخيرة من الستة احوال المذكورة في بـ ٧٨ الى الثلاثة احوال الاول منها وذلك بواسطة اعتبار الزاوية المجسمة المكمل للزاوية المعلومة كما علم حقيقة ذلك في بـ ٨٢ المذكور لكن حيث انه قد تنبأ في احوال يكون حل تلك المسائل فيها بطرق قائمة بذاتها لا مبنية على اعتبار الزاوية المكمل ضروريا بل ربما كان نافعا قد التزم علماء هذا الفن أن يقرر وان تلك المسائل الثلاث حلولا قائمة بذاتها وليكن لما كانت تلك الحلول متوقفة على معرفة المستويات المماسية للسطوح المنحنية قد ائنا ذكرها ولو كان موضعها هو هذا الحين تمام ذكر الاشياء التي هي مبنية عليها فنورد هنا انشاء الله تعالى في بـ ١٦٤ وفي البنود الثلاثة التالية له

### \* (الفصل الخامس) \*

#### (في كثيرى السطوح المنتظمة)

بـ ٩٠ كثير السطوح يسمى منتظما متى كانت جميع أوجهه أى سطوحه مضلعات منتظمة متساوية وكانت جميع زواياها المجسمة متساوية أيضا ولا يخفى أنه لا يوجد من كثيرى السطوح ما يوفى لهذه الشروط سوى خمسة أنواع وهى (أولا) ذو الاربعة سطوح المثلثية المنتظم وهو ما كان محدودا بأربعة أوجه كل منها مثلث متساوى الاضلاع وكل ثلاثة منها مجتمعة مع بعضها حول رأس واحد (ثانيا) ذو الثمانية سطوح المثلثية المنتظم وهو ما تكون من ثمانية مثلثات متساوية الاضلاع ومجموعة مع بعضها أربعة فأربعة

(ثالثا) ذو العشرين سطحاً المثلثية المنتظم وهو ما ~~تكون~~ من عشرين مثلثاً متساوية الاضلاع ومجموعة مع بعضها خمسة وخمسة

(رابعا) ذو الستة سطوح المربعة المنتظم الذي يسمى في الغالب بالمكعب وهو ما تركيب من ستة سطوح كل منها كناية عن مربع وكل ثلاثة منها بمجموعة مع بعضها حول رأس من رؤسه

(خامسا) ذو الاثني عشر سطحاً الخمسية المنتظم وهو ما كان محدودا باثني عشر سطحاً كل واحد منها كناية عن مخمس منتظم وكل ثلاثة منها بمجموعة حول رأس واحدة

اما كونه لا يوجد من كثيرى السطوح المنتظمة سوى هذه الانواع الخمسة المتقدمة فلانه لو اخذ من الالوجه المثلثية او المربعة او الخمسة أعداداً كثر مما تقدم واريد جمعها حول نقطة واحدة لفاق مجموع الزوايا بالسطحية عن ٣٦٠ درجة أو كان مساوياً لها بالاقل وبذلك لا يتيسر تكوين الزاوية المجمعة وأما الدليل على وجود هذه الانواع الخمسة فهو ما كان انشائها على الوجه الآتي

به ٩١ ذو الاربعة اوجه المثلثية المنتظم (شكل ٩٠ لوحة ١٥) لرسم هذا الجسم على مستوي المسقط يرسم أولاً على المستوى الافقى مثلث متساوى الاضلاع بحيث يكون ضلعه مساوياً الى الضلع المعلوم له لكثير السطوح الذي يراد انشاؤه وليكن هذا المثلث هو ا ب ج ثم يقام من نقطة س مركز الدائرة المرسومة عليه مستقيم رأسي مثل (س د س ع) مساو للضلع س ك من المثلث القسائم الزاوية ا س ك المنشأ يجعل ا س قاعدة له وبعد ا ك المساوى الى ا ب وترا

فاذا وصل بذلك من النقطة (س د س) الى الثلاثة رؤوس الاصلية تحصل بالضرورة جسم محاط بأربعة مثلثات متساوية الاضلاع ومتساوية وكانت بالضرورة الزوايا المجسمة الثلاثية المتكونة من اجتماع كل ثلاثة اوجه مع بعضها متساوية أيضاً به ٩٢ ذو الثمانية اوجه المثلثية المنتظم (شكل ٩٠ لوحة ١٥) لرسم هذا الجسم يرسم أولاً في المستوى الافقى مربعاً مساوياً لضلع الجسم الذي يراد انشاؤه الذي نرسمه بمحرف ل وليكن (ا ب ج د) هو هذا المربع ثم يقام من مركزه (س د ه) مستقيم رأسي يمد تحت وفوق نقطة ه ويتوخى ذعليه بالابتداء من هذه النقطة وفي جانبيه ابعدا س ه د س ه متساويين وكلاهما يساوي نصف القطر س ب فلو وصلنا بعد ذلك من نقطتي (س د س) و (س ه د س) الى اربعة رؤوس المربع

لمحدث جسم مركب من هرمين رباعيين تكون أوجههما بالضرورة مثلثات متساوية  
الاضلاع لانا كنادورنا المربع ا ب ح د ربع دورة حول قطره ا ح ا و ب و  
وايضاً تكون الزوايا المجسمة التي رؤوسها في (س ه و س ه) و (ا د ا) و (ب د ب)  
و . . . . . متساوية لان كلاهما تابع لهرم رباعي مساو الى الهرم الاول  
(س ا ب ح د و س ه ا ب ح د)

به ٩٣ د ذوالعشرين سطحاً المثلثية المنتظم (شكل ٦١ لوحة ١٥٥) لرسم هذا الجسم  
يرسم بواسطة الضلع ا ب الذي هو ضلع الجسم المطلوب في مستواً وافق حيثما اتفق الخمس  
منتظم مثل (ا ب ح د و س ا ب ح د) ثم يبحث عن نقطة ك نقطة (س ه و س ه)  
من نقط المحور الرأسي بحيث اذا وصل منها الى رؤوس الخمس حدثت خمسة مثلثات  
متساوية الاضلاع ولذلك يكفي بالضرورة ان ننشئ هـ على القاعدة س ه مثلثاً قائم  
الزاوية مثل س ع بحيث يكون وتره س ع مساوياً الى ا ب أهني الى س ع  
فيكون حينئذ ضلع س ع من هذا المثلث دالاً على الارتفاع المجهول آ س للهرم  
الخماسي (س ا ب ح د و س ه ا ب ح د) ثم نرسم داخل مستواً ك المستوي ق م الأفقي  
الذي سيعين فيما بعد بعده عن مستوي س ع مخرساناً بمثل ل م ه ه و مساوياً  
للخمس ا ب ح د و متحد المركز معه لكنه منحرف عنه انحرافاً بحيث تكون  
رؤوسه ل م ه ه و موضوعة في منتصفات الاقواس الموترية بالاضلاع  
ح د د و د و د ا و . . . . . من محيط الدائرة المرسومة على هذا الخمس ثم بعد ذلك  
نأخذ البعد س س مساوياً الى آ س وننشئ الهرم الخماسي (س ل م ه ه و س ق م)  
فيكون بالضرورة مساوياً للهرم السابق ثم بعد ذلك نوصل من كل رأس من رؤوس  
الخمس العلوي الى الرأسين المجاورين له من الخمس السفلي مثلاً نوصل الرأس (ح د)  
مع (ق م) و (د د) والرأس (د د) مع (ل د) و (م د م) و . . . . . فتتوصل  
حينئذ منطقة وسطى مركبة من عشرة مثلثات تكون متساوية الساقين من طبيعتها  
ينبغي تحويلها الى أخرى متساوية الاضلاع وهذا لا يتأتى الا بانتخاب البعد س ق  
الواقع بين مستويي الخمسين الذي لم نتكلم في الاول على كيفية تعيينه انتخاباً ملائماً  
وحيث انه يكفي لجعل المستقيم (ح د و د) مساوياً الى ل م أن ننشئ مثلث ل ح د  
بوتر مثل ل ك مساوياً الى ل م فضلع ح د يكون هو فرق الاستواء اللازم وجوده بين  
ح د ا و ه و بعد س ق اللازم وضعه بين الخمسين المتوازيين وبذا يتكون

جسم محاط بعشرين مثلثا متساوية الاضلاع بمجموعة خمسة وخمسة وتسعون أيضا  
الزوايا المجسمة متساوية لانه يمكن أن يتصور في كل رأس مثل (ح د ح) و (د د ح)  
و . . . . وجود هرم خماسي مماثل للهرم الاول (سه ا ب ح د ه و س ه ت ع) وهو  
المطلوب

بـ ٩٤ ذوالستة سطوح المربعة المنتظم المعروف بالمكعب (شكل ٦٢ لوح ١٥٤)  
لرسم هذا الجسم يرسم أولا المربع ا ب ح د في المستوى الافقي بحيث يكون ضاعه مساويا  
اضلع المكعب المطلوب رسمه ثم يقام من رؤوس زواياه الاربع رأسيات كالرأسيات  
(ا د آ آ) و (ب د ت ت) و . . . . متساوية وكل منها يساوي الى ا ب  
فاذا وصل بين النهايات العليا هذه الرأسيات باضلاع مربع اخر تحصل مباشرة الجسم  
المطلوب الذي اصطلح على تسميته بالمكعب

بـ ٩٥ ذوالاثني عشر سطح الخمسة المنتظم (شكل ٦٣ لوح ١٥٤) لرسم هذا  
الجسم نرسم أولا في مستوا أفقي حيثما اتفق مثل س آ ه مخمس منتظما كالخمس  
ا ب ح د ه كل ضلع من اضلاعه يساوي ضلع كثير السطوح الذي يراد رسمه ثم يضم  
الى كل رأس من الرؤوس الخمس (ا د آ) و (ب د ت) و (ح د ح) و . . . .  
مخسان مساويان للخمس الاول ومائلان عليه بحيث يتكون من الجميع خمس زوايا  
مجموعة ثلاثية وبذا يتحصل جسم كك الطربوش محاط بستة مخمسات محدودة من  
الاسفل بالمحيط (ك م س ط ع ح ز و ل م ر س ط ع ح ز) لاصه ع ح ز  
الذي سنبين لك عن قريب طريقة ايجاده مسقطيه ثم نرسم أيضا في المستوى الافقي مخمسا  
آخر كالخمس ل م و ف و مساويا للخمس ا ب ح د ه ومتعدا المركز معه لكنه منحرف  
عنه انحرافا بحيث تكون رؤوس زواياه في منتصفات الاقواس الموتره بالاضلاع  
ا ب و ب ح د و . . . . في الدائرة المرسومة عليه وننشئ بعد ذلك على الخمس ل م و ف و  
المذكور طربوشا مقلوبا بعكس وضع الطربوش الاول ثم نرفع هذا الطربوش  
بطول الخط الرأسى (و د آ) الى ان تتخذ زواياه البارزة والداخله مع الزوايا  
الداخله والبارزة من الطربوش الاول ولا يخفى أن جميع ذلك ممكن حيث لم يكن  
الغرض منه سوى أن يجتمع في كل رأس من رؤوس المحيط ثلاثة مخمسات مماثلة لتى  
كونت الزاوية المجسمة الثلاثية (ا د آ) أو (ب د ت) أو الخ

ولاكن لم يبين الآن مقدارا والمسافة الرأسية ت ت التى تفصل مستويي المخمسين الافقيين

عن بعضهما فاجتماع هذين الطربوشين مع بعضهما يحصل كثير سطوح مركب من اثني عشر مخرجة منتظمة متساوية وزواياها المجسمة الثلاثية تكون متساوية أيضا لان كلاهما مركب من ثلاثة مخرجات متساوية

ولاجل رسم مسقطي هذا الجسم مع الايضاح الكافي ينبغي أولا بالاطربوش السفلي فتحمل قاعدته  $ل م و ف$  في مستواً أفقياً مثل  $ت ت م$  مأخوذاً بالاختيار ثم نطبق على هذا المستوى الواجهة الثلاثية المجسمة من المجسمة الثلاثية  $(و د و)$  ولذلك نرسم الخمسين  $ف ص ع ح و د و ع ز ك ل$  مساويين الى الخمس  $ل م و ف و$  ثم نجري على هذين الخمسين عملية مماثلة لتي يجب اجراؤها في حالة ما يراد تعيين الزوايا الزوجية من هذه المجسمة الثلاثية كما في  $٨٣$  بدان نتصور قيامهما من رقدتهما ابتدويرهما حول ضلعي  $ف و د و$  الى أن يتحد منهما الضلعان المنطبقان في  $و ح د و ع و$  ويصيرا مستقيما واحداً وفي أثناء هذا الدوران لا تخرج النقطتان المنطقتان في  $و ح د و ع و$  عن المستويين الرأسين  $ح ا$  العمودى على  $ف و د و ع و$  العمودى على  $و ل$  وهذان المستويان يتقاطعان في الخط الرأسى  $ح$  الذى تجتمع عليه نقطتا  $ح د و ع و$  وتصبحان نقطة واحدة عندما تتركب الزاوية المجسمة وبناء على ذلك تكون نقطة  $ح$  مسقطاً أفقياً لحدى رؤس كثير السطوح المطلوب ويكون أيضاً المستقيم  $ح و$  مسقطاً أفقياً لحد اضلاعه وينبغي ان يمر المستقيم  $ح و$  بالمركز و اذا امتد نحوه ثم لاجل تعيين المسقط الرأسى  $ح$  لهذه النقطة يلاحظ ان هذه النقطة الفراغية رأس مثلث قائم الزاوية قاعدته هي  $ح ا$  ووتره هو  $ا ح$  فلورسم حينئذ مثلث  $ا ح و$  بهذه المعاليم لكان ضلعه  $ح و$  مبيناً للارتفاع  $ت ت$  الذى ينبغي وضعه على المستوى الرأسى للمسقط لاجل الحصول على المسقط الرأسى  $ح$  بان يمد من نقطة  $ت$  الأفقى  $ت س$  ويقام من  $ح$  مستقيم عمودى على خط الارض الى ان يقابل ذلك الأفقى في نقطة  $ح$  المذكورة وبذا يتعين الضلع  $ح و$

ومما يجب التنبيه عليه هنا هو انه كان يمكن تعيين الارتفاع المجهول  $ت ت$  بطريقة أخرى حيث كان المسقط الأفقى  $ح و$  اضلعاً من اضلاع الجسم وحقيقة هذا الضلع المساوية الى  $ف و$  معلومين وبكفى لذلك انشاء مثلث قائم الزاوية قاعدته  $ح و$  ووتره  $ف و$

$$*(v \cdot)*$$

فضله الثاني يبين لنا الارتفاعات المطلوبة تعيينه

والرأس المنطبقة في نقطة ع من المحقق انها عند قيام الوجه ص ع ح وفي ح حول  
ضلع وف لا تخرج عن المستوى الراسي ع ع و اليهودي على محور الدوران وف  
وأن بعدها الحقيقي عنه أوالبعد الاصفر بينهما وهو ع ع ينتهي بأن يأخذ وضعها  
موازيًا إلى إ و فاذامت حينئذ هذا الأخير إلى أن يصير البعد إ ه منه مساويًا إلى  
ع ع وانزل الرأس ه ه ثم نقلت نقطة ه إلى نقطة ع على المستقيم ع ع كانت  
نقطة ع هي المسقط الأفقي للرأس المنطبقة في ع التي أريد تعيين مسقطها

واما مسقطها الرأسى ع فانه يتعين بملاحظة انه ينبغي ان يكون موجودا على ارتفاع  
مثل ت ت مساويا الى ه ه وكان يمكن ايضا ايجاد نقطة ع بملاحظة انه لداعى  
مسألة الطريقين لبعضهم ما ينبغي ان يكون البعد ب ع مساويا الى و ع الذى علم  
من قبل وكذا يمكن تعيين الارتفاع ت ت من هذا الاعتبار الا تى وهو ان المستقيم  
المنسقط على ع ع طوله الحقيقى يساوى الى ع و م

وأخيرا الارتفاع  $h$  في الطربوش العلوي ينبغي بالضرورة أن يؤخذ مساويا الى  $h$  وبعد ذلك يمكن تعيين المساقط الرأسية  $A$  و  $B$  و  $C$  وهما المقابلة للنقط  $A'$  و  $B'$  و  $C'$  ثم تعيين بمثل ذلك النقط  $Z$  و  $Y$  و  $X$  ... بعد ان ترسم الابعاد  $h$  و  $h'$  مساوية كلها الى البعد  $h$  الذي عرّفناك طريقة إيجادها آنفا

**\* (الباب الثاني) \***

في المخطوط المنجية والسطوح وطرق تولدها والمستويات المماسية لها

**\* (الفصل الاول) \***

في الخطوط المنحنية على العموم ومماساتها وخواصها

بـ ٩٦ ليس مقصودنا ان نطيل الكلام هنا على المنحنيات ولا ان نشرح أنواع  
المنحنيات الموجودة شرحاً تفصيلياً فان الهندسة الوصفية ليست محل ذلك اذ لا يخفى ان  
المنحنيات المعروفة كثيرة العدد ولما كتب خاصة بها وفيها يتكلم على جميع أنواع  
المنحنيات





\* (٧٢) \*

في (شكل ٦٥) من وضع المماسين  $اب$  و  $آ$  للمنحن  $م$  لكن قد توجد أحوال فيها يكون المماسان للمنحن واحد في نقطتين متقاربتين مثل نقطتي  $اوب$  (شكل ٦٦) موجودين في جهتين مختلفتين بالنسبة للمنحن المفروض في مثل هذه الحالة يحكم بأنه لا بد من أن توجد بين نقطتي  $اوب$  نقطة مثل  $م$  يكون المماس للمنحن فيها له جزء موجود في إحدى جهتي هذا المنحن وجزء آخر في الجهة الثانية وتلك النقطة هي ما تسمى بنقطة الانقلاب لأنه ينشأ للمشاهدان المنحن قد انقلب فيها أعني أنه قد غير جهة تحدديه في هذه النقطة فإذا فرضنا أن المستقيم  $ب$  ينتقل من وضعه  $م$  يأخذ أوضاعاً أخرى بشرط أن لا يزال مماساً للمنحن وان كان في نقط تقارب من نقطة  $م$  شيئاً فشيئاً رأينا أن نقطة تقاطعه بالمنحن وهي  $ب$  تقرب من نقطة  $ب$  المتحركة معها شيئاً فشيئاً بحيث يأتي وقت تتحد فيه هاتان النقطتان مع بعضهما في نقطة  $م$  ومن ذلك يرى أن المماس للمنحن في نقطة الانقلاب  $م$  وهو  $س$   $س$  يكون تماسه مع المنحن المذكور أقوى وأمتن من التماس المعتاد حيث اجتمعت فيه نقطة تماس ونقطة تقاطع مع بعضهما وفي هذه الحالة يكون للمماس عنصران اثنان مشترك كان بينهما وبين المنحن أحدهما هو العنصر الذي كان مشتركاً بين المماس في وضعه الأول وبين المنحن والثاني هو العنصر الذي تكون من انضمام نقطة التقاطع التي كانت في  $ب$  مع نقطة الانقلاب  $م$  بخلاف التماس الاعتيادي أو البسيط فإن المستقيم المماس فيه لا يشترك مع المنحن إلا في عنصر واحد وهو الحادث من انضمام نقطتي تقاطع القاطع الأصلي عند ما يصير مماساً

فيهم مما ذكر أن تماس المستقيم بالمنحن ليس على حالة واحدة بل هناك جملة رتب من التماس فالتماس المعتاد أو البسيط هو التماس برتبة أولى وهو ما كان فيه عنصر واحد خطي مشترك بين المماس والمنحن وذلك كما في الدائرة مثلاً والتماس الذي رأيناه في نقطة الانقلاب  $م$  (شكل ٦٦) هو التماس برتبة ثانية وهو تماس أقوى من ذي الرتبة الأولى حيث اشترك فيه المماس مع المنحن في عنصرين خطيين بدل عنصر واحد خطي وهناك تماسات ذوات رتب أعلى من ذلك فيقال تماس برتبة ثالثة متى وجدت ثلاثة عناصر خطية مشتركة بين المماس والمماسوس ويقال تماس برتبة رابعة إذا كانت العناصر المشتركة أربعة وهكذا

المستقيم

المستقيم س سـ المماس للمنحنى في نقطة الانقلاب م (شكل ٦٦ لوحه ١٦) هو الحد الفاصل بين القواطع التي مثل ط هـ القاطعة للمنحنى في ثلاث نقط و بين التي لا تقطعه سوى في النقطة المفردة م كالقاطع لا لا مثلاً

متى تحرك المستقيم المماس ب ب حالة كونه مماساً على الدوام للمنحنى فإنه يدور في جهة معلومة حتى يصير مماساً له في نقطة الانقلاب م ثم يأخذ بعد ذلك أوضاعاً موازية للأوضاع التي كان يأخذها قبل مروره بنقطة م وحينئذ فلن تصورنا وجود مستقيم ثابت في مستوى المنحنى ومماساً له المتحرك لعلنا أن المماس يصنع مع هذا المستقيم زاوية متغيرة تتغير بوضع المماس المتحرك وهي إما أن تأخذ في الكبر شيئاً فشيئاً إلى أن تبلغ نهايتها زدياداً عند ما يمر المماس بنقطة الانقلاب ثم تأخذ في الخسـة ثانياً بعد تجاوز المماس لهذه النقطة إذ علمنا أن الأوضاع التي يأخذها المماس بعد ذلك تكون موازية على التناظر لأوضاعه الأولى وإما أن تتغير هذه الزاوية الابتدائية بالنقص شيئاً فشيئاً حتى يصل المماس إلى نقطة الانقلاب فتبلغ نهاية نقصها وترجع بعد ذلك آخذة في الزدياد شيئاً فشيئاً ومن ذلك يعلم أن المماس لمنحنى ما في أى نقطة من نقط انقلابه يصنع مع أى مستقيم ثابت موجود معه في مستو واحد زاوية كبراً أو أصغر الزوايا التي تصنعها بقية المماسات مع هذا المستقيم الثابت وتلك خاصية يتميز بها هذا المماس في نقطة الانقلاب عما سواه من المماسات وتستعمل لأجل تعيينه كما سنرى ذلك في محله انشاء الله تعالى

٩٩ وقد يكون للمنحنى أحياناً نقطة رجوع وهي النقطة التي فيها يغير المنحنى المذكور جهة سيره الأصلية راجعاً إلى الجهة التي أتى منها وذلك كما (في شكل ٦٧ و ٦٨ لوحه ١٦) ولأجل تصور الكيفية في تكون مثل هذه المنحنيات يقال إن سرعة سير النقطة الرأسية لها تأخذ في النقص شيئاً فشيئاً إلى أن تنعدم في نقطة الرجوع م وتسير صفرًا ثم تأخذ ثانياً في الزيادة تدريجاً مغيرة اتجاه سيرها الأصلي وآخذة اتجاهها مضاداً له بحيث يكون تغير اتجاه المماس مستمراً

ويقال لهذا الرجوع رجوع من الرتبة الأولى أو من الرتبة الثانية بحسب وجود شعبتي المنحنى الراجع في جهة واحدة بالنسبة للمماس م سـ وعدمه فإن كان الشعبتان موجودتين في جهة واحدة من هذا المماس (كما في شكل ٦٧) قيل للرجوع رجوع من الرتبة الأولى وإن كان كل واحد منهما موجوداً في جهة مخصوصة كما في (شكل ٦٨)

قبل له رجوع من الرتبة الثانية

بنسبته وهناك منحنيات يكون لها نقطة مزدوجة وتسمى أيضا نقطة العقدة وهي التي تنعقد فيها شعبتا المنحنى وذلك كما في (شكل ٦٩ لوحة ١٦) الذي يرى فيه ان شعبتى المنحنى ا م ح م و المعلوم من عقدتان في نقطة م التي تسمى من أجل ذلك بنقطة العقدة وعلى المعلوم يعطى اسم نقطة مضاعفة الى النقطة التي يمر بها جملة اقواس من منحن واحد وذلك كالنقطة م التي في (شكل ٧٠) وكما انه يمر بهذه النقطة جملة اقواس من المنحنى فيكون ذلك يكون لهذا المنحنى في هذه النقطة مماسات مختلفة بقدر عدد تلك الاقواس لكل قوس منها مماس مخصوص

بنسبته الخط المستقيم هو أبسط الخطوط المنحنية الا ان نهاية أى التي تمتد الى ما لا نهاية فاذا اعتبرنا مستقيما مثل اب (شكل ٧١ لوحة ١٦) ومستقيما آخر ح و قاطعه ودور هذا الاخير حول احدى نقطه مثل ح مثلا بحيث تأخذ نقطة التقاطع و على التوالي اوضاعا مختلفة مثل و و و و و... الخ حالة كونها آخذة في التباعد جهة الشمال الى ما لا نهاية ففي وضع ما يصير بالضرورة المستقيم القاطع المتحرك موازيا الى اب وتنتقل حينئذ نقطة التقاطع الى بعد لانها في وفي هذه الحالة لا يمكن الحكم على نقطة التقاطع بانها هل هي موجودة في نهاية المستقيم اب من الجهة اليسرى أو في نهايته اليمنى لكن متى استقر المستقيم المتحرك في الحركة بعد الوضع الموازى رأينا أن نقطة التقاطع التي كانت على بعد لانها في قد أخذت في الاقتراب شيئا فشيئا عائدة من الجهة اليمنى للمستقيم اب حتى تصير في البعد المحدود بعد ان كان بعدها لانها فيا وحيث الامر كاذر فالاخرى حينئذ هو أن نعتبر المستقيم اب كنحن مقبول ونقطة التقاطع شعبيته

المتدتين في جهتين متضادتين موجودة على بعد غير محدود أو لانها في وعليه في وجد أن منحنيا تمتد الى ما لا نهاية لزم أن يعلم ان له نقطة لانها فية لكنه لا يقف فيها ولا في اعدادها بل لا بد أن يكون له شعبة ثانية غير شعبته الاولى ممتدة نحو هذه النقطة لانها فية ومتصلة بالشعبة الاولى فيها كما شوهد ذلك في المستقيم ولا بد من أن يكون لكل منحنى فروع لانها فية بقدر ماله من النقط لانها فية وان يكون لكل فرع منها شعبتان متصلتان ببعضهما في النقطة لانها فية

ولبيان ذلك نمثل لك بالمنحنى المبين في (شكل ٧٢ لوحة ١٧) الذي يعرف بالقطع الزائد فهذا المنحنى له نقطتان لانها فيتان أي موجودتان على بعد لانها في ولذا كان له فرعان

مثل

مثل ا ب ح و وهو كلاهما ذو شعبتين ممتدتين الى ما لانهاية وشعبتنا كل منهما متصلان ببعضهما في النقطة الانتهائية التي تميل كاتاهما للاصول اليها والمماس المنحنى لانها في نقطة الانتهائية قد اعطى له اسم مخصوص ليميزه عن سائر المماسات التي تقطع تماسها محدودة وهذا الاسم هو الخط التقريبي وبقدري ما يكون للمنحنى من النقاط الانتهائية يكون له خطوط تقريبية فالقطع الزائد مثاله خطان تقريبان هما و ح و ر ر لان له نقطتين لانتهائيتين فهما امتد فرعاً للقطع الزائد وهما امتدعهما الخطان التقريبيان فانهما لا يبقيا بلان الفرعين الا في نقطتيهما الانتهائيتين ويكونان مماسين لهما في هاتين النقطتين

ولاجل الحصول على الخط التقريبي المنحنى تستعمل الطريقة التي يجب اجراؤها للحصول على اى مماس حيثما اتفق وذلك ان يؤخذ قاطع مثل م ه ويحرك تحريكاً بحيث تجتمع بسببه نقطتا التقاطع م و ه في بعد لانها في وتصبحان نقطة واحدة ومن المعلوم انه اذا حرك م ه تحريكاً بعيداً عن نقطتي م و ه عن بعضهما شيئاً فشيئاً الى ان تصبحا لانتهائيتين فعند ذلك يمكن ان نعتبر ان طرفي المستقيم م ه التماسيه بعضهما و صارا نقطة واحدة كما تقدم في اول هذا البند ويصير اذن القاطع م ه خطاً تقريبياً بهند الهندى على منحنى ما في احدى نقطته هو المستقيم المقام من تلك النقطة عمودياً على مماس ذلك المنحنى فيها وحيث يمكن ان يقام من نقطة التماس جلة مستقيمتان كاه عمودية على المستقيم المماس وكل واحد منهما موجود مع المماس في مستوي مخصوص فجميع هذه المستقيمت يقال لها عمودية على المنحنى في نقطة التماس المعتبرة وحينئذ يكون المنحنى المعلوم منحنياً مستوياً يعطى على الخصوص اسم الهندى عليه في نقطة معينة على المستقيم المقام من تلك النقطة عمودياً على مماسه فيها الموجود في مستوى ذلك المنحنى ومماسه

\* (مبانيط المنحنيات المستوية) \*

بهند اذا فرضنا منحنياً حيثما اتفق كالمنحنى ا ب صه (شكل ٧٣ لوه ١٧٤) مرسوم في مستوياً ونصورنا انه منقسم الى جلة عناصر متساوية بان كان  $\text{ب}=\text{ت}=\text{ث}=\dots=\text{الح}$  ثم اقيم من منتصفات هذه العناصر العموديات المتجاورة جداً م ح و م د و م ر ... الخ فهذه العموديات تتقاطع مع بعضها تقاطعاً متالياً ويكون من تقاطعاتها المتتالية منحنى مثل ح د ر ... الخ وتكون

كلها مساحة والمنحنى  $\delta$  المذکور والمحاصر لجميع عموديات المنحنى الاصلی  
 $ab$  هو ما يسمى ببسوط أو مفرد المنحنى  $ab$  وأما المنحنى  $ab$  فانه يسمى  
بالنسبة للمنحنى  $\delta$  بالمنحنى البسيط أو الفارده وسيظهر لنا سبب هذه التسمية فيما  
هوأت ومن المعلوم ان نقطة  $\delta$  التي هي نقطة تقاطع العمودين  $cm$  و  $cm'$  المقامین  
من منتصفی العنصرین  $ab$  و  $ab'$  المتساويين تكون بالضرورة متساوية الابعاد  
عن الثلاث نقط  $a$  و  $b$  و  $c$  وعليه فتكون نقطة  $\delta$  المذکورة مركز الدائرة يكون  
بينها وبين المنحنى  $ab$  عنصران مشتركان  $a$  و  $b$  و  $c$  وحيث انه لا يمكن  
تكوين الدائرة بالمرور بأكثر من ثلاث نقط فتلك حينئذ هي الدائرة الوحيدة التي  
تقرب وتكاد أن تتحد مع المنحنى  $ab$  بجوار نقطة  $b$  زيادة عن مساوها ولذا سميت  
بالدائرة الملاصقة لهذا المنحنى في نقطة  $b$  اما نصف قطر هذه الدائرة الملاصقة فانه على  
التحقيق عبارة عن أحد الخطوط الثلاثة  $\delta = \delta' = \delta''$  التي يمكن استعاض  
كل منها تقريبا بأحد الخططين المتساويين  $cm$  و  $cm'$  لان هذه المستقيمات المتفاوتة  
ماخرجت عن كونها انصاف أقطار لدائرتين مرسومتين خارج وداخل المضلع  $abc$   
الوحيد ومن المعلوم انه عند النهاية أو عندما تعتبر العناصر صغيرة صغرا لانها انما تتحد  
هاتان الدائرتان ببعضهما وتصبحان كالدائرة الواحدة ومن ذلك ينتج أن المركز  $\delta$   
ونصف القطر  $\delta$  للدائرة الملاصقة يتعينان بتقاطع عمودين قريبين جدا من بعضهما  
من عموديات المنحنى المعلوم

ولاجل البرهنة على ان المستقيم  $\delta$  مساو للمستقيم  $\delta'$  نقول حيث كان العنصران  
 $ab$  و  $ab'$  متساويين فيكون مثلثا  $abc$  و  $abc'$  متساويين أيضا ومن تساويهما  
يثبت تساوي الضلعين  $cm$  و  $cm'$  ثم ولبيان أنه لا فرق محسوس بين  $cm$  و  $cm'$   
نقول يؤخذ من مثلث  $abc$  القائم الزاوية أن

$$cm = \sqrt{cb^2 - ab^2} = \sqrt{cb^2 - \left(1 - \frac{ab^2}{cm^2}\right)cb^2}$$

وبأخذ النهايات يرى انه عندما يصير العنصر  $ab$  لانها في الصغرى فلا يكون هناك  
فرق بين  $cm$  و  $cm'$  سوى كمية لانها ثابتة الصغرى من الرتبة الثانية يجب اهلاكها  
ولو بالنسبة الى  $cm$  واذن فيمكن ان يعتبر  $cm$  مساويا الى  $cm'$   
بغنى المستقيم  $\delta$  هو ما يسمى أيضا بنصف قطر انحناء المنحنى  $ab$  في نقطة  $m$   
لانه

لأنه بحسب كبر وصغر طوله يضعف انحناء ذلك المنحنى كثيرا أو قليلا وفي الواقع كذلك  
لأننا إذا أردنا أن نتصور حقيقة انحناء خط ما مثل  $AB$  نعتبره كضلع صارت كوينه بثنى  
المستقيم  $ABC$  ... حول النقطة  $C$  و  $B$  و  $A$  ... الخ ومن  
البدیهی أن الانحناء في نقطة  $C$  يكون ميدينا بمقدار الانفرجاق الواقع بين العنصرين  
 $BC$  و  $CA$  أعني بزاوية القماس  $BCA$  أو بالقوس  $BA$  الذي تقدر به تلك  
الزاوية في الدائرة التي نصف قطرها الوحدة (زاوية القماس اسم للزاوية الواقعة بين  
قوس من منحنى ما وبين المستقيم المماس له من طرفه) لكن زاوية  $BCA$  مساوية  
لزاوية  $MA$  وتلك الزاوية شاملة للقوس  $MA$  المتحد مع الدائرة الماصقة المرسومة  
بنصف القطر  $MA$  وحينئذ فالقوس  $MA$  المشابه للقوس  $BCA$  والمرسوم بنصف  
قطر مساو للوحدة يكون مقداره هو الآتي

$$\frac{\text{فاس}}{\text{ق}} = \frac{\text{س}}{\text{م}} = \frac{\text{م س م}}{\text{م}} = \text{ه}$$

والرمز فاس يدل على أحد العناصر التي مثل العنصر ب واما د فهو رمز لنصف القطر م ومن حيث ان المنحنى ا ب صه منقسم الى عناصر متساوية فتكون المساحة فاس ثابتة واذن فيعلم من مناقشة مقدار ه المتقدم ان الانحناء المبين بالزاوية ه يتغير من نقطة الى اخرى من المنحنى ا ب صه بالنسبة العكسية لنصف القطر م = د يعني انه اذا كبر د قل الانحناء أي صار خفيفا وان صغر د صار الانحناء كبيرا ومحسوسا به . . . . . (شكل ٣ ص ١٧) اذا أخذنا محيط لرب قابل للالتئام مثل م د د ح . . . . . واف على طول المنحنى المبسوط ثم ثبتت إحدى نقط ذلك المحيط واتكن ع مثلا وأعطى لمجزئه المستقيم ح م طولا بحيث يصل طرفه لمحداً للمنحنى الباسط ا ب صه ثم فك المحيط المرفوف على المبسوط فكان تدريجيا مع جعله مشدودا على الدوام فان طرفه م ينشئ بالضبط على المنحنى ا ب صه وفي الواقع كذلك لانه عندما تأتي نقطة تماس المحيط بالمبسوط من الوضع د الى ح يزيد الجزء المستقيم من المحيط وهو م د ح بقدر د ح ويكون حينئذ طوله الكلي عبارة عن م د + د ح = م ح لكن من حيث ان هذا الخط الاخير مساو الى م د بمقتضى بسند فينبني على ذلك ان الطرف المتحرك م يمر بالضبط بنقطة م ومثل ذلك يحصل في جميع الاوضاع المتتالية للمحيط الذي يمكن بواسطة حينئذ



الدوام مساويا لنصف قطار الدائرة المعلومة نفسها

به ١٠٦ م د فاذا فرضنا الآن أن المبسوط هو المعلوم وأنه دائرة كالدائرة م ع ع ع ...  
(شكل ٧٥ لوحه ١٧) التي مركزها و واريدايجاد باسط هذا المبسوط فاذا تتبعنا  
القاعدة المتقدمة في البند السابق وأخذنا محيط البناولفقاء على الدائرة المعلومة  
وفرضنا ان طرفه الذي سيتحرك كان منطبقا على محيط الدائرة في نقطة م ثم فك الخط  
تدريجيا بعد ان ثبتت منه نقطة مثل نقطة ع فلا شك أن نقطة م ترسم في أثناء حركتها  
محميا مثل م م م م ... م يكون هو باسط أوفارد الدائرة التي مركزها و

لكن يمكن ايجاد هذا الباسط أيضا بطريقة رسمية ولذلك يقسم محيط الدائرة الى أجزاء  
متساوية ولتكن اثني عشر مثلا ثم يؤخذ على المماسات ع م و ع م د ع م م  
و ... الخ ابعاد متساوية الى  $\frac{1}{12}$  و  $\frac{2}{12}$  و  $\frac{3}{12}$  و  $\frac{4}{12}$  و ... الخ من طول  
محيط الدائرة فتتوصل النقاط م و م و م و م و ... الخ التي اذا جمعت بنقط  
متصل تحصل الباسط المطلوب ولاجل جمع هذه النقاط بمنحن يكفى هنا أن تجعل النقاط  
ع و ع و ع و ... الخ مراكزا والمماسات ع م و ع م د ... الخ انصاف  
أقطار وترسم جملة أقواس من دوائر تتصل مع بعضها ويتكون عن مجموعها الباسط  
المطلوب لان انصاف الاقطار المذكورة هي انصاف اقطار الدوائر الانصافية للمنحنى  
م م م م ... المطلوب ايجاده

وهذا الباسط م م م م ... م الخ هو حلزون غير محدود نقطة أصله هي م بل  
يمكننا أيضا أن نعتبر الحلزون م ل المماسات للحلزون المتقدم كفرع آخر من الباسط  
المذكور وأن هذين الفرعين ليسا الا كمنحن واحد ناشئ من التحرك المستمر لنقطة  
واحدة وفي الواقع كذلك لانه اذا عوضنا المحيط الملفوف على المبسوط بمستقيم غير قابل  
للاثناء وغير محدود مثل المستقيم ا ب وتصورنا ان هذا المستقيم يدور بدون انزلاق  
حول الدائرة م ع ع ع ... الخ مع بقاءه على الدوام مماسا لها فمن الواضح أن كل نقطة مثل  
ا ثابتة على هذا المستقيم تأخذ على التوالي أوضاعا مثل م م و م م ... الخ الى أن  
تألف في نقطة الاصل م وبعدها اذا استمر تحرك المستقيم في جهة سيره الاصلية يرى أن



نقطة ١ التي رسمت المنحنى  $am^m$  ثم  $m$  ثم  $m$  ثم  $m$  بعد ذلك خلف نقطة التماس وترسم بدون انقطاع الفرع  $m$  لاسي الذي يجب اعتباره بناء على ذلك فرعاً أو جزءاً من المنحنى الاول  $m^m$ ... الخ لا منحنياً قائماً بذاته وبما يجب أن يلاحظ أيضاً هو أن طريقة إيجاد البسيط هذه بواسطة دوران مستقيم غير قابل للالتنا حول مبسوطه هي وإن كانت توصل هي والطريقة المتقدمة في بيشار إلى نتيجة واحدة وهي إيجاد البسيط لكن الطريقة الحالية أعم من المتقدمة بل قد يكون العمل بها ضرورياً عندما يكون المبسوط المعلوم مشتملاً على نقط رجوع كفا في القطع الناقص والقطع المكافئ وما شبههما لانه ان لم تستعمل هذه الطريقة واستعملت الاولى كان من اللازم تغيير نقطة ثبات الخيط لاجل نقله من فرع الى آخر

### \* (الفصل الثاني) \*

(في تعاريف السطوح وفي طرق تولدها وأنواعها)

٧٠٠ يطلق على المصطلح اسم سطح على المحل الهندسي لجميع الأوضاع التي يأخذها على التوالي خط ما يتحرك مغيراً وضعه بل وأحياناً هيئته على حسب قانون معين مستمر وينتج من هذا التعريف أنه لا يجوز إطلاق كلمة سطح على مجموع عدة نقط أو عدة منحنيات متقاربة من بعضها ما أمكن وليس بينها أدنى ارتباط أو علاقة ثابتة بل يلزم لاجل أن يصح إطلاق كلمة سطح على هذا المجموع أن تكون هذه النقط أو تلك الخطوط منقادة لبعض روابط مشتركة بينها ومستمرة وتلك الروابط أو الشروط هي التي اذا ترجمت بالاصطلاح الجبري كانت ترجمتها عبارة عن معادلة ذلك السطح الخط المتحرك الذي عليه توجد السطح يسمى راسماً لذلك السطح والقانون المعين المستمر الذي على حسبه يتحرك الراسم هو عبارة عن عدة شروط موضوعية يجب أن يتقادها الراسم في أثناء حركته حتى لا يكون وضعه وهيئته في أي نقطة فراغية مترتباً بالاختيار بل يكون ذا وضع مخصوص وهيئة معينة وأوفق الوسائط التي جرت العادة باستعمالها لبيان قانون حركة الراسم هي أن يعين خط واحد أو جملة خطوط ثابتة تسمى بالادلة وواحد أو دلائل ويكلف الراسم دواماً بالالتكاهن عليها في جميع أوضاعه واذن يلزم لاجل تحديد سطح مخصوص تحديداً تاماً أن يبين جنس الراسم وكيفيته تحركه وتعيين الادلة التي يكلف هذا الراسم بالالتكاهن عليها في أثناء حركته وبغير الادلة وحدها تحصل جملة سطوح تابعة لمائلة واحدة وأيضاً يجب أن يلاحظ أن السطح الواحد المنصوص



المستقيم س و و ثانياً يبقى محورها دائماً مواز بين لوضعيهما الاصليين وثالثاً ان هذين المحورين يصغران معاً بمقادير مناسبة للإبعاد س و و س و د و د... الخ فان هذا القطع الناقص المتحرك ينطبق على التوالي على آ د و آ د و د... الخ ويكون بناءً على ذلك راسماً للمخروط متغيراً الميعة والوضع معاً لكن لا جـ ل تحويل منطوق هذه الشروط المختلفة الى شرط ذي منطوق أبسط من منطوقها يكفي أن نتذكر أن المنحنى ذا الدرجة الثانية يصير معيناً في مستوييه متى علمت منه خمس نقاط وحينئذ فلورسمنا على سطح المخروط خمسة أضلاع ثابتة مثل س ا و س ب و س ج و س د و س هـ لا يمكننا أن نقول انه يكفي لتولده هذا المخروط أن يحرك القطع الناقص المتغير ا ب ج بشرط أن يكون دائماً مستوياً به موازاً بنفسه وأن يكون ممكناً دائماً على هذه الخمسة مستقيمات التي تعتبر اذ ذاك خمسة أدلة

وأخيراً من حيث ان المستويات المتوازية القاطعة للمخروط ممكن أخذها في أى اتجاه كان بالاختيار وأيضاً من حيث انه كان يمكن قطع المخروط بسطوح أخرى غير المستويات كأن يقطع مثلاً بكرات متحدة المركز مركزها نقطة و وانصاف أقطارها متغيرة فكل ذلك مما ثبت لنا أنه يوجد جملة خطوط مستوية أو مضاعفة الانحناء يمكن اتخاذها رؤاساً للسطح المخروطى الواحد

بنياد (السطح الاسطوانى) السطح الاسطوانى هو المحل الهندسى للأوضاع المتنوعة التي يأخذها مستقيم مثل ا ا يتحرك وهو متكى دائماً على طول منحنى ثابت مثل ا ب ج (شكل ٧٧ و ١٨٤) حالة كونه موازياً على الدوام لاتجاه معلوم لكن هذه الطريقة ليست هى الطريقة الوحيدة التي يمكن بها تولد السطح الاسطوانى بل هناك طرق غير متناهية يتولد بها السطح المذ كور كما سترى ذلك قريباً وانما هى الطريقة الوحيدة التي يكون فيها رؤاس السطح مستقيماً وليبيان أنواع هذه الطرق الغير المتناهية نقول لو قطعنا السطح الاسطوانى الحاد من تحرك المستقيم ا ا بعدة مستويات متوازية وموازية لمستوى الدليل ا ب ج كانت المقاطع الحادثة بالضرورة منحنيات متساوية ومساوية الى الدليل ا ب ج وعليه فيمكن اعتبار السطح ناشئاً من تحرك المنحنى ا ب ج بالتوازي لنفسه مع اتسكته دائماً على المستقيم ا ا باحدى نقطه الثابتة (ويقال ان المنحنى يتحرك بالتوازي لنفسه متى بقي فيه وتران حيثما اتفق من ضمن أوتاره موازيين على الدوام لوضعيهما الاصليين) وهذا الشرط يتربى على استوفائه المحصول على أمرين أولهما

تحرك

تتحرك مستوى المنحنى بالتوازي لنفسه وثانيهما عدم دوران المنحنى داخل مستوييه المتحرك  
وفي طريقة التولد هذه يقال للمستقيم  $\alpha$  دليل للمنحنى المتحرك  $\alpha\beta$  الذي يسمى  
اذا كان رأسا فاذا تغير بعد ذلك اتجاه المقاطع المتوازية أمكن الحصول على عدد غير  
متناه من الرسوم المنحنية التي كل منها يصلح لتولد الاسطوانة عينها وبالجملة فيمكن  
اعتبار السطوح الاسطوانية كحالة خصوصية من السطوح المخروطية أعني في حالة  
مات بعد رأس المخروط الى ما لانهاية

بـ ١١١ الد ملاحظ ان التنبه عليه هنا هو انه اذا غير الدليل المنحنى للمخروط أو الاسطوانة  
بمستقيم  $\alpha\beta$  السطح الحادث الى مستوى عليه فيمكن تعريف المستوى بتعريف مشابه  
لتعريف الاسطوانة والمخروط بأنه هو السطح الحادث من تحرك مستقيم مكلف أولاً بأن  
يتكئ دائماً على مستقيم ثابت وثانياً بأن يكون دائماً موازاً بالوضعية الابتدائية أو يمر  
على الدوام بنقطة ثابتة

بـ ١١٢ (في السطح التحركي أو الدوراني) السطح التحركي الذي يعرف أيضاً بالدوراني  
هو كل سطح حدث من دوران منحنٍ  $\alpha\beta$  حول مستقيم ثابت مثل  $\alpha\beta$  وهو  
(شكل ٧٨ لوحة ١٨) بحيث ان كل نقطة من هذا المنحنى كنقطة  $\gamma$  مثلاً ترسم دائرة  
مستوية عمودية على المحور  $\alpha\beta$  ونصف قطرها هو البعد الاصغر  $\gamma\delta$  والكاش بين  
هذه النقطة وبين المحور المذكور

ومما ينبغي ملاحظته هو انه وان كان جميع انصاف الاقطار المختلفة وهي  $\alpha\beta$   
 $\gamma\delta$  ... الخ عمودياً على المحور  $\alpha\beta$  فانها لا تكون متوازية عند  
ما يكون الرأس  $\gamma\delta$  مضاعف الانحناء ولا عندما يكون هذا الرأس منحنياً مستوياً  
ومستوييه لا يمر بالمحور  $\alpha\beta$  أعني لا يشمل عليه ويقال للدوائر  $\gamma\delta$  ... الخ  
المتنوعة المرسومة بانصاف الاقطار المذكورة وازيات السطح التحركي

بـ ١١٣ اذا مرر بالمحور  $\alpha\beta$  مستويات حيثما اتفق مثل  $\alpha\beta$  و  $\gamma\delta$  وغيرهما  
حدثت في السطح التحركي مقاطع مستوية مثل  $\alpha\beta$  و  $\gamma\delta$  ... الخ تسمى  
بالقطاعات الجانبية لهذا السطح التحركي وتلك القطاعات تكون بالضرورة متماثلة في  
الهيئة والشكل ومتساوية لان مستويات هذه القطاعات الجانبية قاطعة للازيات في  
انصاف أقطار صانعة بالضرورة بينها زوايا متساوية مثل  $\alpha\beta = \gamma\delta = \alpha\theta$  وعليه  
اذا دور المستوى  $\alpha\beta$  هو  $\alpha\beta$  بالمقدار الزاوي  $\alpha\beta$  انطبقت في آن واحد جميع انصاف

الاقطار  $و م ر$  و  $و م$  على  $و ا ر$  و  $و ا د$  و بالضرورة يتحدد القطعان  
الجانبان مع بعضهما وبصيران قطعاً جانبياً واحداً وهذا لا يتأتى الا اذا كانا متساويين  
ومتعدي الهيئة والشكل وما قبل عليهما يقال على غيرهما فيثبت المطلوب حينئذ من أن  
جميع القطاعات الجانبية لسطح تحركي واحدة تكون متساوية ومتماثلة الشكل والهيئة

به  $١٤$  د وينتج من ذلك أيضاً انه اذا دار القطع الجانبي  $ا ا$  حول المحور  $د ه$  فانه  
يمر على عموم السطح التحركي واذن فيمكن اعتباره كراسم جديد للسطح المذكور يمكن  
استعماله بدلا عن المنحنى الاصلى  $ح ح$  ولو كان مخالفا له وفي الواقع ان المنحنى  $ح ح$   
يكون مغايراً للقطع الجانبي اذ لم تكن جميع نقطه موضوعة في مستو واحد مدار بالمحور  
 $د ه$  كما يشاهد ذلك في الشكل الحالى المفروض ان منظوره مرسوم على المستوى

هو  $ت ا$  أعني مستوى المحورين  $و ر$  و  $و ص$  ولهذا السبب قد نقطت  
اجزاء الموازيات وجزء المنحنى  $ح ح$  الموجودة خلف ذلك المستوى وبالجمله يمكن دائماً  
تعيين القطع الجانبي لسطح تحركي من بعد معرفة راسه الخيتم  $ا$  اتفق اذ يكفي لذلك  
البحث عن نقط تقابل مستو مثل هو  $ب$  الموازيات المتنوعة المرسومة بنقط الخط  
 $ح ح$  كما سترى مثال ذلك فيما بعد ان شاء الله تعالى

به  $١٥$  ا د السطوح التحركية التي نحن بصدد هالها طريقة تولد أخرى يجب معرفتها  
وذلك انه حيث كان كل مستو عمودي على المحور  $د ه$  (شكل ٧٨ لوحه ١٨) يلزم  
ان يقطع السطح التحركي في دائرة مركزها موجود على المحور المذكور به  $١٦$  ا د ولها نقطة  
مشاركة بينها وبين المنحنى  $ح ح$  أو بينها وبين القطع الجانبي  $ب ت$  فيمكن حينئذ  
اعتبار السطح التحركي ناشئاً عن الاوضاع المختلفة التي تأخذها دائرة تتحرك وهي عمودية  
دواماً على المحور  $د ه$  ومركزها يمشي على هذا المحور حالة كون نصف قطرها يتغير  
بحيث يكون محيط الدائرة متكاداً دائماً على المنحنى الثابت  $ح ح$  ويكون حينئذ هذا  
المنحنى بصفة داليل للسطح التحركي يمكن استعماله بالقطع الجانبي  $ب ت$  والدائرة  
التحركية بصفة راسم لهذا السطح متغير الهيئة والوضع معاً

وتعريف السطح التحركي به هذا التعريف له مزية عظيمة وهي جعل جميع السطوح  
التحركية الممكن وجودها في العالم من عائلة واحدة به  $١٧$  ا د حيث يمكن تولدها عموماً  
بنوع واحد من الراسم الا وهو الدائرة التي تتحرك دائماً بالعامد على المحور منقادة في أثناء  
حركتها لانحناء القطع الجانبي الذي هو بصفة داليل لمركزها وهو فقط الذي يختلف

باختلاف السطوح التحركية من جهة أشكالها المختلفة لا من جهة جنسها أو عائلتها وأما نوع الراسم فهو ثابت

بـ ١٦ ولذا فإنه بحسب اعتبار القطع الجانبي للسطح التحركي مستقيماً أو قطعاً ناقصاً أو قطعاً زائداً أو قطعاً مكافئاً يكون السطح الحادث مخروطياً أو اسطوانياً أو مجسماً ناقصياً تحريكاً أو مجسماً زائداً تحريكاً سواء كان ذاتية واحدة أو ذاتيتين أو مجسماً مكافئاً تحريكاً لكن بشرط أن يجعل محوردوران السطح التحركي منطبقاً على أحد محاور المنحنى الذي يتخذ راسمه لأنه إن لم يلاحظ ذلك فالسطح الحادث وإن كان لم يزل تحريكاً لكنه يكون مغايراً للسطوح التي ذكرنا لك أسماؤها وفي الواقع لنمثل ذلك بالدائرة مثلاً فنقول من المسلم الذي لا نقض ولا إبرام فيه أن الدائرة إذا دارت حول أحد أقطارها باعتبار مركزها كمحوردوران لها كان السطح التحركي الناشئ عن دورانها سطحاً كروياً لكن متى دارت حول مستقيم موجود في مستويها غير مار بمركزها حدث عنها سطح تحركي آخر يعرف بالجسم الكعكي أو الحلقى وهو جسم على شكل الكعكة أو الحلاقة سنذكره فيما بعد

بـ ١٧ السطوح التحركية التي ذكرناها في البند السابق وهي المجسم الناقص والزائدي بنوعيه والمكافئ التي قبلنا كلاً منها عقب أسمائه بلفظة تحركي تميزها عما سنذكره بعده هذا البند ليست إلا أحوالاً خصوصية من الخمسة سطوح العمومية الآتية وان كانت غير تحركية لكن لزيادة منافعها فيما سيأتي قد أجمعنا بذكرها هنا وهي السطوح الخمسة ذوات الدرجة الثانية المتميزة عن بعضها وليس داخلها من عددها السطح المخروطي ولا الاسطوانى ولا المستوى التي هي سطوح بسيطة وقد ذكرناها فلا نعود لها ثانية ونقتصر على ذكر الخمسة سطوح الآتية فقط

بـ ١٨ (في المجسم الناقص) لنفرض قطعاً ناقصاً مثل  $ا د ه$  (شكل ٧٩ لوحه ١٨) منشأ على نصف المحورين  $ا = ا$  و  $د = د$  ومعتبراً أنه مرسوم في المستوى الرأسى المتخيلين صورة السطح الناقص عليه بالمتطور ويؤخذ من ذلك أن الخطوط النقطية تدل على الأجزاء الموجودة خلف مستوى هذا القطع الناقص من المنحنيات وهذا الاصطلاح هو الذى سنبهه في بقية هذا الفصل

فاذا أنشأنا قطعاً ناقصاً آخر مثل  $آ ت$  في مستوى عمودى على  $و د$  بنصف محورين هما  $الا حدانى و آ = آ$  للقطع الناقص الاول ومستقيم اختياري الطول مثل  $وت = ت$  لكنه



في طريقة تولده الثانية هو الذي صادر دائرة أى تساوا محاوراه ببعضهما فان الجسم يكون متحركاً أيضاً لكنه غير الجسم المتحرك المتقدم لان محوره دورانه يكون في هذه الحالة اى الاصغر من  $\frac{1}{2}$  فيكون حينئذ اسطح الحادث مبسطاً لان ارتفاعه اصغر من عرضه ولذا يعرف بالجسم الناقصى المتحرك المبسط فاذا تساوت انصاف المحاور الثلاثة  $\frac{1}{2}$  و  $\frac{1}{2}$  و  $\frac{1}{2}$  بعضها آل الجسم الناقصى الحادث الى كرة

وينتج من ذلك أولاً أن الجسم الناقصى على نوعين الاول وهو ما كانت محاوره الثلاثة مختلفة يسمى بالجسم الناقصى ذى الثلاثة محاوراً والجسم الناقصى فقط والنوع الثانى هو ما كان فيه محوران متساويان من ضمن محاوره الثلاثة وهذا النوع يعرف بالجسم الناقصى المتحرك وهو نوعان أيضاً جسم ناقصى متحرك مستطيل وهو ما كان كل من محوريه المتساويين اصغر من المحور الثالث المفرد وجسم ناقصى متحرك مبسط وهو ما كان بعكس ذلك

وثانياً أن الكرة لم تكن سوى حالة خصوصية من الجسم الناقصى فعندما تتساوى محاوره الثلاثة ببعضها يستحيل الى كرة

بشكل في الجسم الزائدى ذى الطية (شكل ٨٠ لوحة ١٩) اذا عوض القطع الناقص الذى كان مستعمل فى البندين المتقدمين بصيغة دايبل بقطع زائد مثل  $\frac{1}{2}$  الذى نصف محوره الحقيقي  $\frac{1}{2}$  ونصف محوره التخيلى  $\frac{1}{2}$  ثم انشئ قطع ناقص فى مستوى عمودى على  $\frac{1}{2}$  كالقطع الناقص  $\frac{1}{2}$  مثل المحورين أحدهما عبارة عن الوتر  $\frac{1}{2}$  للقطع الزائد والثانى اختيارى وحرك على مقتضى قانون الحركة المتقدمة فانه يولد مجسمات يعرف بالجسم الزائدى ذى الطية وانما قيد بذى الطية لانه لم يكن مركباً من سوى طية واحدة غير منتهية كالقطع الزائد المستعمل دلالة وعندما يمر مستوى القطع الناقص المتحرك بالمركز  $\frac{1}{2}$  يباغ القطع الناقص المذكور نهايته فى الصغر حيث يصير المحور المتغير  $\frac{1}{2}$  اذذاك مساوياً الى  $\frac{1}{2}$  الذى هو اصغراً وتار القطع الزائد وهذا هو السبب الذى اوجب تسمية المنحنى  $\frac{1}{2}$  بقطع ناقص الخلق والمستقيمت الثلاثة الاتية وهى

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$



تسمى بالمحاور الثلاثة للجسم الزائدي لكن من حيث ان الأخير منها هو وحده لا يقابل  
السطح فيقال له بسبب ذلك المحور التخيلي وأما الكمية الحقيقية  $z$  فإنها ليست الا  
معاملا للمقدار الجبري التخيلي الذي ينتجه التحليل عند البحث عن نقطة السطح التي  
يقال بوجودها على المستقيم الغير المحدود  $و د و$

بـ ١٢٢ متى كان المحوران الحقيقيان  $و ا ر$  و متساويين صار الجسم الحادث  
كما تقدم في بـ ١٢١ جسمًا متحركًا يسمى بالجسم الزائدي ذي الطبيعة المتحركة اذ يتوول حين  
ذلك القطع الناقص الراسم الى دائرة وفي هـ هذه الحالة الخصوصية يمكن أيضا تولد السطح  
بواسطة دوران منحنى القطع الزائد  $آ آ$  حول محوره التخيلي  $و د و$

بـ ١٢٢ في الجسم الزائدي ذي الطبيعة (شكل ٨١ لوجه ١٩٤) اذا أنشئ قطع زائدي نصفه  
المحورين  $و ا = ا ر$  كما تقدم اكنه موضوع بحيث يكون  $و د$  محوره  
الحقيقي ثم تحرك القطع الناقص  $آ آ$  كما تقدم فانه يتولد نوع من المجسمات الزائدية له  
طيتان غير محدودتين منفصلتان عن بعضهما بمسافة هوائية لم يكن بها نقط من السطح  
وفي الواقع لان الوتر المتغير  $آ آ$  الذي يجعل محورا للقطع الناقص المتحرك يصير تخيليا  
فيما بين نقطتي  $و د$  و يصير المحور الثاني  $و ت$  بالضرورة تخيليا أيضا لان بينهما وبين  
الاول نسبة محفوظة ثابتة ولذا عي صيرورة الراسم كله تخيليا في بحر تلك المسافة فلا يمكن  
أن تتولد من تحركه في انشاءه نقط حقيقية من السطح ومع ذلك فن حيث انه معلوم ان  
نصف المحور  $و آ$  يصير عند المرور من نقطة و مساويا الى  $و ا - آ$  فلواريد تعيين  
المعامل الحقيقي للمحور الآخر الذي هو تخيلي أيضا يلزم ان يؤخذ على مستقيم عمودي على  
المستوى  $ا و د$  بعد مثل  $و ب$  بحيث يكون

$$\frac{و ت}{و آ} = \frac{و ب - آ}{و ا - آ} = \frac{و ب}{و ا}$$

وحين ذلك يكون المستقيمان  $ا د = ا ر$   $و ب = ب ر$  هما اللذان يعبر عنهما بالمحورين  
التخيليين للجسم الزائدي ذي الطبيعة وأما  $و د = و ر$  فهو محوره الحقيقي

بـ ١٢٣ لاجل صيرورة هـ هذا الجسم متحركا يجب أن يكون المحوران التخيليان  
 $و ا ر$  و متساويين لان هـ هذا الشرط موجب لان يكون  $و ا = و ت$  وهـ هذه  
المتساوية ينبنى عليها تحويل القطع الناقص الراسم الى دائرة وفي هـ هذه الحالة يمكن أيضا

تولد هذا السطح التحركي بتدوير الفرعين  $\alpha$  و  $\beta$  من القطع الزائد الاصلى حول محوره الحقيقي  $\gamma$

وينتج مما ذكر أن الجسم الزائدي نوعان ذو طية واحدة وذو طيتين وكلا هذين النوعين على نوعين ذو ثلاثة محاور مختلفة وتحركي فحينئذ توجد أربعة أنواع من الجسمات الزائدية تتميز عن بعضها ولها أسماء مخصوصة وهي الآتية

الجسم الزائدي ذو الطية

الجسم الزائدي ذو الطية التحركي

الجسم الزائدي ذو الطيتين

الجسم الزائدي ذو الطيتين التحركي

بـ ٢٤ (في الجسم المكافئ الناقص) لنجعل الآن الدليل الثابت قطعاً مكافئاً مثل  $\alpha$  و  $\beta$  (شكل ٨٢ لوحه ١٩) ثم نأخذ قطعاً ناقصاً مثل  $\gamma$  و  $\delta$  محوره الاول  $\alpha = \beta$  يلزم أن يكون مساوياً على الدوام للاحد اثني المتغير لهذا القطع المكافئ ومحوره الثاني  $\gamma = \delta$  يكون أول مرة اختيارياً ثم يحفظ بعد ذلك النسبة الواقعة بينه وبين المحور الاول ونحركه بالنعام على محور القطع المكافئ وهو  $\gamma$  و  $\delta$  فيولد سطحاً مركباً من طية واحدة غير محدودة في اتجاه المحور  $\gamma$  وهذا السطح هو ما يعرف بالسطح المكافئ الناقص لان جميع المقاطع الممكن رسمها عليه لا تخرج عن أن تكون اما قطعاً مكافئاً أو قطعاً ناقصاً

بـ ٢٥ وعند ما يتساوى محورا القطع الناقص الراسم ببعضهما يصير السطح المتولد تحريكاً ويسمى بالسطح المكافئ التحركي وينبغي ان يصير تحريكاً يمكن تولده أيضاً بتدوير القطع المكافئ  $\alpha$  و  $\beta$  حول  $\gamma$  و  $\delta$

بـ ٢٦ (الجسم المكافئ الزائدي) لنفرض الآن ان الدليل الثابت قطع مكافئ أيضاً مثل  $\alpha$  و  $\beta$  (شكل ٨٣ لوحه ١٩) ونستعوض الراسم الناقص الذي كنا نستعمله لحد الآن بقطع زائد مثل  $\gamma$  و  $\delta$  مرسوم في مستو عمودي على  $\gamma$  و  $\delta$  بنصف محورين مثل  $\alpha$  و  $\beta$  بحيث تبقى النسبة بينهما على الدوام ثابتة وأولهما الذي هو المحور الحقيقي لهذا القطع الزائدي يكون على التوالي مساوياً للاحد اثبات المتنوعة  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  و  $\delta$  الخ من القطع المكافئ الثابت فاذا حرك هذا القطع الزائد بالتوازي انفسه فانه يولد

في مبدأ الامر طيتين مفتوحتين أحدهما جهة اليمين والاخرى جهة الشمال ومفصولتين  
عن بعضهما بالافراغ الداخلي للأسطوانة و  $\alpha$  و  $\beta$  ممتدتين الى غير نهاية في الاتجاه و  $\gamma$   
مثل القطع المكافئ لكن اذا رفع القطع الزائد المتحرك من بعد نقطة و نحو نقطة  $\gamma$   
صغر محوره الحقيقي و  $\alpha$  ثم يندم في نقطة و عليه فتتصل ببعضهما الطيتان اللتان  
قلنا انهما كانتا منفصلتين وفي ذلك الوقت بعينه يستحيل القطع الزائد في هذا الوضع الى  
مستقيمين غير محدودين  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  موجودين باكملهما على السطح وموازيين  
الى الخطوط التقريبية لجميع القطاعات الزائدة المتقدمة

ومتى ارتفع القطع الزائد الراسم فوق نقطة و بأن وصل الى نقطة كنقطة و مثلاً يظهر  
ثانياً لكن في وضع مثل  $\alpha$  و  $\beta$  منعكس بالنسبة الى خطيه التقريبيين وفي الواقع  
لان المحورين اللذين بينهما مارسميا بالمستقيمين و  $\alpha$  و  $\beta$  يجب بيانهما  
في الحقيقة لاجل الضبط بمقاديرهما الآتية

$$\alpha = \beta \quad \text{و} \quad \beta = \gamma - \alpha$$

وحينئذ من حيث ان احد اثني القطع المكافئ في نقطة و صار تخيلياً وان المحور الاول  
للقطع الزائد المتحرك يصير به كذلك هكذا  $\alpha = \beta$  و  $\gamma - \alpha$  فيجب اذن ان المحور الثاني  
لهذا القطع لاجل ان يحفظ مع المحور الاول نسبة ثابتة ان يكون مقداره مبيناً بالصورة  
الآتية

$$\alpha = \beta = \frac{\gamma}{2} \quad \text{و} \quad \alpha = \frac{\gamma}{2} \cdot \frac{\gamma}{\alpha}$$

وهذه هي كمية حقيقية مبينة في الشكل بالبعد و  $\gamma$  ومن ذلك يظهر ان المحور الحقيقي  
و  $\gamma$  للقطع الزائد الراسم يصير فيما فوق نقطة و متجهاً في اتجاه عمودي على المستوى  
 $\alpha$  و  $\beta$  وان فرعي هذا المنحنى يولدان أيضاً طيتين غير محدودتين أحدهما موضوعه  
امام هذا المستوى والاخرى خلفه لكن باجتماعهما مع الطيتين السابقتين في المستقيمين  
 $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  يتكون من المجموع سطح واحد غير مقطوع ذواتنا آت متضادة  
الجهة كما يرى ذلك تقريباً في السطح المقعر من مقر البكرة الذي يلف عليه الحبل وقد

سمى هذا السطح بالسطح المكافئ الزائدى لانه بالتحليل الجبرى يعلم ان جميع المقاطع المستوية الممكن رسمها عليه لا تكون الا قطاعات مكافئة أو قطاعات زائدة ومن ضمنها المحالتان اللتان يكون خط التقاطع فيهما مستقيما منزها أو مستقيمين متقاطعين مع بعضهما

ولاجل سهولة تصور (الشكل ٨٣ لوحة ١٩) يجب أن نتذكر انه مرسوم على المستوى الرأسى  $\alpha$  و  $\beta$  بصفة كون المستوى المذكور مستوى المنظور وعلى هذا يعلم ان جميع الخطوط النقطية موضوعة خلف هذا المستوى والاولى ان تراجع هيئة هذا السطح في ارنيكه الذى يعمل بالتجسيم أو بواسطة خطوط مشدودة كما سنبين ذلك ان شاء الله فيما سياتى لان تصور هذا السطح من الشكل الخطى فيه صعوبة نوعا

نتيجة يفهم مما تقدم ان السطح المكافئ الزائدى لا يمكن أن يكون تحريكا لانه علم مما تقدم ان هذا السطح ليس له بالكتابة مقاطع مستوية مقفولة وبناء عليه فلا يمكن أن يكون موجودا عليه دوائر مع ان هذا الشرط لازم في السطوح التحركية

بـ ٢٧ الطريقة التى ذكرت آنفا لتولد وتكوين السطح المكافئ الزائدى ينشأ عنها فى الحقيقة نوع عدم استقرار فى الرسم حيث انه من فوق نقطة ويصير القاطع المكافئ الذى كان كدليل للسطح تخيليا ولكن من حيث انه يمكن بسهولة تفسير هذه الصعوبة بواسطة التحليل الجبرى فقد استحسننا اثبات طريقة التولد المذكورة لأمور منها انها مشابهة جدا لطرق تولد السطوح المتقدمة وانها محققة جيداً للتسمية التى اعطيت لنوعى السطح المكافئ وليكونها تظهر جيذا وجود المستقيمين ولذا وكون الموضوعين على السطح المكافئ الزائدى ومع ذلك فهناك أيضا طريقة تولد أخرى مستمرة بالكتابة ومشاركة بين نوعى السطح المكافئ نذكرها فنقول

اذا رسم على المحور الواحد و س (شكل ٨٢ لوحة ١٩) قطعتان مكافئتان مثل  $\alpha$  و  $\beta$  بحيث يكونان متجهين فى الرأس و مرسومين فى مستويين متعامدين وان يكون تغيراهما متجهين فى جهة واحدة والبعد الثابت لكل منهما اختياريا (البعد الثابت للقطع المكافئ هو البعد الكائن بين بؤرتيه ودائيله) ثم حرك أحدهذين القطعتين المكافئتين بالتوازي لنفسه بدون حصول اختلال فى شكله ليكن بشرط ان رأسه تتحرك دائما على القطع المكافئ الثانى الثابت تحصل بالضرورة السطح المكافئ الناقص الذى كوناه فى بـ ٢٤ بطريقة أخرى

ولواخذنا أيضا قطعين مكافئين مثل  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  و  $\delta$  (شكل ٨٣ لوحه ١٩٠هـ)  
 مرسومين بنفس الشروط المتقدمة و فقط بتغير احوالهما وجهان في جهتين متضادتين  
 ثم حرك أيضا القطع المكافئ  $\alpha$  و  $\beta$  و  $\gamma$  و  $\delta$  ذو الشكل الثابت بالتوازي لنفسه وبشرط  
 أن تسمى دائما رأسه على القطع المكافئ الآخر الثابت لتحصل لنا السطح المكافئ الزائدي  
 الذي تولد في  $\beta$  بكيفية أخرى

### \* (الفصل الثالث) \*

(في الكلام العام على المستويات المماسية للسطوح وكيفية بيانها بالرسم)  
 ينسب ١٢٨ يقال ان المستوي مماس للسطح في نقطة معينة متى اشتمل على المستقيمات  
 المماسية لجميع المنحنيات التي يمكن رسمها على هذا السطح من النقطة المعينة المذكورة  
 ولأجل أن نحكم بصحة هذا التعريف يلزمنا ابتداء أن تثبت وجود مستوي بهذه الصفة  
 لكل نقطة من نقط السطح المفروض وأنه يشتمل على جميع مماسات المنحنيات المرسومة  
 من تلك النقطة على السطح لأنه ربما اتهم الانسان في مبدأ الامر أن المماسات لجميع  
 المنحنيات المارة بنقطة ما من السطح توجد على سطح مخروطي لأعلى مستوي واحد كما أن  
 ذلك يحصل في الحقيقة أحيانا في بعض نقط غريبة ولذا يكفي ان نبرهن على ان كل ثلاثة  
 مماسات لثلاثة منحنيات مرسومة على سطح ما من نقطة معينة عليه تكون موجودة  
 في مستوي واحد

ولنفرض مثلا أن  $\alpha$  م ح (شكل ٨٤ لوحه ١٩٠هـ) هو عبارة عن الخط الراسم للسطح  
 المعلوم في وضعه عند ما يمر بنقطة م المألومة وأن خط  $\alpha$  م هو منحن مرسوم على  
 السطح ومعدلا لجعل أن يتسكى عليه دائما الراسم عندما يتحرك لتولد السطح المعلوم  
 وانحرايا  $\beta$  م ص منحنيان التاحيئان اتفق مرسومهما بالاختيار على السطح بعينه فاذا  
 نقلنا الراسم في وضع آخر مثل  $\alpha$  م ح فإنه لا يتأخر عن ان يقابل المنحنى  $\beta$  م ص  
 في نقطة ما مثل نقطة ط ويشترط أن تكون نقطة م مأخوذة على الدليل  $\alpha$  م  
 بالقرب من نقطة م على قدر ما يمكن وحينئذ اذا وصلت الثلاث نقط م و  $\alpha$  و ط  
 بمستقيمات غير محدودة كانت هذه الثلاثة مستقيمات الموصولة قواطعها بالنسبة  
 للمنحنيات  $\alpha$  م و  $\beta$  م ص و  $\alpha$  م ح وتكون الثلاثة موجودة بالضرورة في مستوي  
 واحد ثم نحرك الراسم  $\alpha$  م ح على خط  $\alpha$  م مع تقريبه من وضعه الابتدائي  $\alpha$  م ح لكن  
 بشرط

بشرط المحافظة دائماً على القانون الذي على مقتضاه يتغير كل من وضع هـ هذا المنحنى المتحرك وهيئته لاجل أن يرسم السطح المعلوم ثم بعد ذلك نتصور أن مستوى الثلاثة قواطع يدور حول نقطة م بحيث انه يمر في آن واحد مع الراسم بالنقط م و ط ثم م و د ط . . . الخ التي هي نقطة تلاقي هذا الراسم بالمنحنيين م و د م ص على التوالي و عليه فهذا المستوى المتحرك يكون على الدوام شاملاً للثلاثة قواطع المتغيرة ومن المعلوم أنه متى رجع الراسم الى الوضع ح م ح تتحدد نقطة م المتحركة على المنحنى م و د مع نقطة م وأيضاً من الضروري أن نقطة ط الكائنة على المنحنى م ص تأتي هي الأخرى وتجتمع على النقطة م وبالتبعية لذلك ينبغي أن تتحدد أيضاً نقطتا ط و د الكائنتان على المنحنى ح ح المتحرك ببعضهما وتصبحان نقطة واحدة

وبناء عليه يرى أن الثلاثة قواطع المتحركة قد صارت مماسة على التوالي الى المنحنيات م و د م ص و د م ح فاذا تذكرنا أن هذه الثلاثة قواطع كانت في كل وضع من اوضاع الراسم موجودة في مستو واحد كما حينئذ أن نستنتج من ذلك أنها متى آلت الى الثلاثة مماسات م س و م ش و م ش فلا تزال توجد في مستو واحد ونهاية الاوضاع التي كان يأخذها على التوالي مستوى الثلاثة قواطع المتحرك وأيضاً من حيث ان المنحنى م ص قد أخذ بالاختيار لافي وضع مخصوص على السطح فينتج حينئذ من ذلك أن المستوى المار بالمماسين لمنحني م ح و م و د يشمل على المماس لاي منحن آخر مار من نقطة م و عليه فيكون المستوى م س م ش مماساً للسطح وذلك بناء على التعريف الذي قررناه في أول هذا البند

اعلم ان هذه النظرية مهمة جداً لانها تسهل الاعتبارات المختصرة النافعة جداً الداخلة في طريقة النهايات كما ستري ذلك في محله وما يدل على أهمية هذه النظرية الاحتياج لها كثيراً عند البرهنة على بعض الاشياء فمثلاً لولا ثبت ان جميع المماسات للمنحنيات المرسومة على سطح واحد من نقطة معلومة توجد في مستو واحد لما كان يسوغ لنا اعتبار ان اى سطح منحن يتركب من جملة عناصر صغيرة مستوية وذلك لان تلك العناصر السطحية الصغيرة مركبة من الاجزاء الصغيرة الخطية المشتركة بين منحنيات السطح ومماساتها

بـ ١٢٩ د وحينئذ يكون للسطح المعلوم طيتان أو جملة طيات متقاطعة كما يحصل ذلك

في السطح المخروطي مثلاً عندما تفرض قاعدته منحنيًا معقوداً لأنه يظهر لنا في مبدأ الأمر أن النقط الموجودة على خط تقاطع الطيتين لا تنطبق عليها خاصية المستوى المماس لأي سطح فنظن أنها مستثناة من القاعدة العمومية بمعنى أن المستوى المماس للسطح في إحدى هذه النقط لا يشتمل على جميع المماسات للمنحنيات الممكنة رسمها على السطح من النقطة المذكورة ولكن إذا تأملنا في هيئة السطح المخروطي الذي يكون بهذه الصورة نجد أنه مركب من طيتين مميزتين عن بعضهما بحيث يلزم التفريق بين المنحنيات الممكنة رسمها من النقطة المفروضة على سطح المخروط لأن بعض هذه المنحنيات يكون منسوباً لأحدى الطيتين أي موجوداً على سطحها والبعض الآخر على الطية الثانية وعليه فتكون المماسات لها مميزة بعضها بوجودها في مستو واحد مماس لأحدى الطيتين والبعض الآخر يوجد في مستو آخر مماس للطية الثانية في نفس النقطة الواحدة وبهذه الصورة متى اعتبرنا طيتي السطح كسطحين قائمين بنفسهما ومتمقاطعين مع بعضهما في الزايم المتكفي على نقطة انعقاد القاعدة رأينا أن خاصية المستوى المماس للسطح هي خاصية عمومية ليس فيها استثناءات

بشأن ذلك فقد توجد أحياناً بعض استثناءات حقيقة في خاصية المستوى المماس لكن ذلك لا يحصل إلا نادراً في بعض نقط مخصوصة من السطح تسمى من أجل ذلك بالنقط الغريبة وهي النقط التي يكون الخط الراسم للسطح أو دليله قوآل فيها إلى نقطة واحدة فلا يكون له بالضرورة مماس بالكلية مثلاً نقطة رأس السطح المخروطي هي نقطة غريبة بالنسبة لجميع نقط السطح المذكور وإذا وجد للمخروط مستو مماس فيها لأن جميع الخطوط الممكنة رسمها على السطح من هذه النقطة تؤل إلى الزايم المستقيمة من المخروط ولا شك أن كل راسم منها يعتبر مماساً لنفسه فإذا نظرنا إلى رؤوس المخروط باعتبارها كماسات للخطوط المرسومة على السطح من نقطة الرأس نجد أن كل راسمين منها يوجدان في مستو مخصوص بمعنى أن هذه المماسات المختلفة لا توجد كلها في مستو واحد طبقاً للخاصية المتقدمة في § ١٢٨ واذن تكون رأس المخروط نقطة غريبة ليس لها فيها مستو مماس مطلقاً ولو نظرنا إلى طريقة تولد السطح المخروطي بواسطة تحريك منحني مواز لقاعدته كما في § ١٢٩ رأينا أن هذا الراسم المنحني يضيق شيئاً فشيئاً كلما تباعد عن القاعدة وقرب من الرأس حتى إذا وصل إلى الرأس يصير نقطة واحدة وحينئذ فلا يكون له في هذا الوضع إلا خبر مماس حقيقي ومن هنا يتضح لنا

السبب في عدم تطبيق خاصية  $\beta$  على نقطة رأس المخروط وكذا اذا نظرنا لكون المخروط متولدا من تحرك راس مستقيم بالاتكاء على قاعدته وبشرط ان يمر دائما بنقطة ثابتة وهي رأس المخروط كما في  $\beta$  نجد انه لا داعي صيرورة الدليل الثاني نقطة لا يكون له مماس بالكلية ولهذا السبب قد امتنع تطبيق خاصية المستوى المماس العمومية على نقطة رأس المخروط فهي بهذه الاسباب نقطة غريبة بالنسبة لسطح المخروط وقد يوجد مثل هذه الحالة في بعض السطوح التحركية التي يكون قطعها الجانبي متقاطعا مع محور الدوران على زاوية حادة أو منفرجة فان نقط هذا السطح التي تكون موجودة على محور الدوران لا يوجد لهذا السطح فيها مستويات مماسة لانه لما كانت جميع المماسات للقطاعات الجانبية المختلفة لهذا السطح في احدي هذه النقط غير موجودة في مستوى واحد بل توحد على سطح مخروطي قائم صارت بسبب ذلك نقطة غريبة بالنسبة للسطح التحركي التي هي منه ومثال ذلك السطح التحركي الحادث من دوران قوس دائرة حول وتره فان نقطتي السطح الموجودتين على محور الدوران تكونان غريبتين

$\beta$  ومن المهم ان يلاحظ ان تعريف المستوى المماس لا يسطح بانه هو المستوى الشامل لكافة مماسات الخطوط الموجودة على السطح والمارة من نقطة التماس كما في  $\beta$  لا يفيد ولا يقضي بان لا يكون بين المستوى المماس والسطح المماس نقط مشتركة سوى نقطة التماس نعم ان ذلك يحصل في السطوح المحدبة تحديدا كليا لكن كثيرا ما يكون المستوى المماس للسطح ملاقيا له في نقط متعددة بل قاطعا له في منحن ماربة نقطة التماس كما ستري مثال ذلك في المستوى المماس لسطح الجسم الكعبي  $\beta$  وهذه الحالة لا تمنع أبدا المستوى الذي بهذه الصورة من أن يشتمل على كافة مماسات الخطوط المرسومة على السطح من نقطة التماس المعينة وعليه فهو لا شك مماس تماسا حقيقيا في هذه النقطة ولو كان قاطعا للسطح في جميع النقط لمغايرة لها

$\beta$  وهناك نوع من السطوح يكون المستوى المماس له في نقطة معلومة من نفسه وطبيعته مماسا لنفس السطح المذكور بطول مستقيم مار بهذه النقطة فمثلا اذا نظرنا لمحالة الاسطوانة  $\alpha$  (شكل ٨٥ لوحة ١٩) التي قاعدتها حيثما اتفق نجد انه لو مرر بالرسم  $\alpha$  وبالمستقيم  $\beta$  المماس للقاعدة مستويا فان ذلك المستوى لا يكون مشتملا فقط على جميع المماسات للخطوط المرسومة على الاسطوانة من النقطة  $\beta$



كما ثبت ذلك في **ب ٢٨** بل يكون مشتملا أيضا على جميع المماسات لعموم المنحنيات  
الرسومة على الاسطوانة من جميع نقط الراسم **ا ب** المتعددة ولأجل البرهنة على صحة  
ذلك يكفي أن نبرهن على أن المستوى **ا ب س** يشتمل على المماس **م ف** للمنحنى المحيط  
اتفق **م ص** الموجود على سطح الاسطوانة ولذلك نقول إذا مررنا مستويا مثل **ا ب ر**  
بالرأس **ا ب** وبنقطة **د** القريبة من نقطة **ب** قطع بالضرورة هذا المستوى الاسطوانة  
في مستقيم مثل **د ه** مواز إلى **ا ب** ويقطع المنحنى **م ص** في نقطة مثل **ح** موضوعة  
على المستقيم **د ه** بحيث أن هذا المستوى يشتمل على القاطعين **ب د ر** و **م ح د**  
فأذا دورر المستوى المذكور حول **ا ب** بشرط أن تقرب بالدوران نقطة **د** من نقطة **ب**  
وجدنا أن نقطتي التقاطع **د ر** و **ح** تتغيران على المنحنيين لكنهما موجودتان دائما  
على مستقيم يتحرك وهو دائما مواز إلى **ا ب** وحينئذ نفى انحدت إحدى هاتين النقطتين  
ولتكن **د** مثلاً مع نقطة **ب** ففي الوقت بعينه تتحد نقطة **ح** الأخرى مع نقطة **م** بمعنى  
أنه عندما يأخذ المستوى المتحرك الوضع **ا ب س** فالقاطع المتغير **م ح د** الموجود  
دائماً في هذا المستوى يؤول إلى المماس **م ف** وعليه فيثبت المطلوب من أن هذا  
المستقيم موجود في المستوى **ا ب س**

وينتج من ذلك أنه عندما يقال أن المستوى مماس للأسطوانة في نقطة **ق** أم من سطحها ينبغي  
أن يفهم بالضرورة أن هذا المستوى مماس للأسطوانة بطول الرأس المستقيم المار  
بنقطة التماس المعلومة

**ب ٣٣** النظرية المتقدمة في البند السابق لها أيضاً نتيجة مهمة جداً يحتاج إليها كثيراً  
فيما سياتي

وهي أنه إذا أسقط منحن مثل **م ص** (شكل ٨٥ لوحة ١٩) ومماسه **م ف** على  
مستو كان مسقط المماس مماساً لمسقط المنحنى والعكس للعكس لأنه لا جمل إيجاد  
مسقط المنحنى **م ص** يلزم بمقتضى **ب ٢٨** أن تتصور اسطوانة مارة بهذا المنحنى وعمودية  
على المستوى المعلوم وتقطع في منحن مثل **ب د** يكون هو مسقط المنحنى **م ص** وأيضاً  
لأجل إسقاط المستقيم **م ف** ينبغي أن يمر بربطة مستوية عمودية على مستوى المسقط  
ولا ينبغي أن المستوى الذي هذه الصورة هو المستوى **ف م ب** والكون هذا المستوى  
مماساً بالضرورة للأسطوانة في نقطة **م** يلزم أن يكون بمقتضى **ب ٣٢** مماساً لها  
في جميع نقط الرأس **م ب** وفي نقطة **ب** بالجملة وبناءً عليه فيكون المستوى المذكور

شاملا للمستقيم ب س المماس للقاعدة ب ح وحينئذ فهو هذا المماس يكون عبارة عن  
نقط تقاطع المستوى المسقط بمستوى القاعدة وعليه فهو مسقط المماس م ف على  
مستوى القاعدة المذ كور وبذلك يثبت المطلوب

و بمثل ذلك يمكن اثبات صحة هذه النظرية في الحالة التي تكون فيها المساقط ماثلة أعني  
عندما تكون الخطوط المسقطة ماثلة على مستوى المسقط ومتوازية

ب ١٢٤ المستوى المماس للسطح المخروطي في نقطة م من سطحه يسمى بطول الراسم  
المستقيم المار بهذه النقطة وبرهان ذلك كبرهان خاصية المستوى المماس للاسطوانة  
في نقطة ما انما يلاحظ ان نقطتي د ر ع اللتين كانتا متقلان معا على مستقيم متغير  
يكون موازيا على الدوام للراسم المار بنقطة التماس تتحركان هنا معا على مستقيم متغير  
أيضا متقاطع مع اب في رأس المخروط

وأخيرا يلزم التنبيه على ان هذه الخاصية ليست قاصرة على الاسطوانة والمخروط فقط  
بل سنرى فيما سياتي انها توجد في جميع افراد جنس من السطوح تسمى بالسطوح القابلة  
للابساط وليس كل من الاسطوانة والمخروط الاحالة خصوصية من هذا الجنس  
العمومي وسنسوق الكلام على ذلك في محله

ب ١٣٥ ومع ذلك فانه لا يجب أن نتصور أن خاصية تماس المستوى المماس للسطوح  
المذ كورة بطول الراسم المار بنقطة التماس ناشئة عن كون تلك السطوح تقبل التولد  
بواسطة الراسم المستقيم فان تصور ذلك من الخطأ الا كبر وذلك لان هناك سطوحا كثيرة  
تقبل التولد بالرأس المستقيم لكن المستوى المماس لها في أي نقطة من سطحها لا يسمى  
الا في نقطة التماس المعينة لا غير (راجع ما في ب ١٨٢ د و ب ١٩٤ ر) ومع أنه مشتق على  
رأس مستقيم من رؤس السطح لا تتوفر شروط تماس المستوى بالسطح الا في نقطة واحدة  
من هذا الرأس والسطوح التي بهذه الكيفية هي التي يسمونها بالسطوح الشمالية  
ب ١٣٦ اذا اختصرنا جميع ما قيل في حق المستويات المماسية امكان نستنتج منه قاعدة  
عمومية اتعين المستوى المماس لاي سطح في أي نقطة تعرض عليه وهي أن يبحث عن  
المماسين المنحنيين مرسومين على السطح من النقطة المفروضة ويمرر بهما مسطويين يكون  
مماسا للسطح المعلوم في تلك النقطة انما تسمى بالاعمال قد جرت العادة بأن تأخذ المنحنيين  
اللازمين لتعيين المستوى المماس في وضعين بسيطين جدا وسهلين حتى يكون العمل  
عليهما سهلا ومضبوطا عنما اذا أخذنا مجانا وسندكر عن قريب عدة أمثلة متنوعة على

كيفية اجراء هذه العملية

وحيثما يمكن أن يمرر بالنقطة المألومة مستقيم موجوداً كله على السطح المعلوم يكون هذا المستقيم عبارة عن شيئين في آن واحد وهما كونه خطاً مرسوماً على السطح من نقطة التماس وكونه عبارة عن المماس لنفسه وبناء عليه فيكون هذا المستقيم موجوداً في المستوى المماس المطلوب وبمكاستعماله لتعيين المستوى المذكور باشتراكه مع المماس لخط آخر مرسوم على السطح من نقطة التماس لكن لازماً أن يحذر من أن يتصور أن ذلك دافع لأن يكون هذا المستوى مماساً للسطح بطول ذلك المستقيم به ١٣٧ إذا أقيم من نقطة تماس أي مستو مماس لسطح ما مستقيم عمودي على هذا المستوى المماس سمي هذا المستقيم بالعمودي على السطح المعلوم في النقطة المفروضة أو برأى السطح في النقطة المذكورة والتسمية الأولى أضبط من الثانية لأن المستقيم العمودي على سطح لا يكون دائماً رأسياً أعني عمودياً على المستوى الأفقي بل إن اتجاهه يتغير بتغير وضع المستوى المماس فالأولى حينئذ بحسب ما أرى أن يصرف النظر عن هذا الاسم أي رأى السطح حيث أنه لا يدل على معناه دلالة مضبوطة كما يدل عليه اسم العمودي على السطح

ويفهم من هذا التعريف أنه يكفي لتعيين عمودي السطح في أي نقطة البحث عن المستوى المماس للسطح في هذه النقطة ثم يقام منها مستقيم عمودي عليه بأن ينزل من مسقط نقطة التماس مستقيمان عموديان على أثرى المستوى المماس وذلك تطبيقاً لما ذكر في النتيجة التي تقررت في به ٣٤

وينتج من ذلك أن العمودي على سطح الكرة من نقطة مفروضة عليها هو نصف قطرها المار بتلك النقطة وامتداده لأنها إذا رسمنا من النقطة المفروضة على سطح الكرة قوسين من دائرتين عظيمتين ورسمنا المماسين من هذه النقطة ثم وصلنا نصف قطر الكرة المار بهاراً بنا أن نصف القطر المذكور عمودي على كل من المماسين لقوسى الدائرتين العظيمتين واذن فيكون عمودياً على مستوييهما الذي هو المستوى المماس للكرة في النقطة المعبرة وعليه فيكون نصف القطر المذكور بمقتضى ما تقررت في أول هذا البند هو العمودي على سطح الكرة في النقطة التي فرضت عليه

به ١٣٨ (المحيط الظاهري لجسم) من المعلوم أنه إذا وضع الإنسان أمام عينه جسماً ما ونظر إليه فإنه لا يمكنه مشاهدته جميع سطح هذا الجسم بل يرى منه جزءاً محدوداً فقط وهذا

الجزء المشاهد تتغير سعة بالنسبة لبعده عن الناظر عن الجسم المنظور بحيث كلما قربت العين من الجسم قل الجزء المشاهد وكبر بالضرورة الجزء الغير المشاهد وكلما بعدت عنه كان الامر بالعكس فالخط المحدد لسعة الجزء المشاهد الفاصل بينه وبين الجزء الغير المشاهد هو الذي اطبقوا عليه اسم المحيط الظاهري للجسم بالنسبة لنقطة البصر المعينة وليبان ذلك تفرض ان نقطة و (شكل ٨٦ لوحة ٢٠) هي الوضع الذي تشغله عين الناظر ونتصوره بمرجع المستويات الممكن رسمها من نقطة و مماسة للسطح المعلوم سه فهذه المستويات تمس السطح في نقط مثل ا و ب و ج و د . . . الخ فيكون عنها منحن فيكون هو المنحنى الذي تمر عليه جميع الاشعة البصرية وا و ب و ج و د . . . الخ الخارجة من عين الناظر مماسة للسطح وعليه فيكون الخط ا ب ج د هو المحر الذي ينتهي اليه الجزء الذي يتيسر للناظر الواضع عينه في نقطة و مشاهدته من سطح الجسم المعلوم وهو ما يسمى بالمحيط الظاهري للسطح سه بالنسبة لنقطة البصر و وهذا المحيط الظاهري يتغير هيئة ووضعا اذا انتقلت نقطة البصر من موضعها فمثلا اذا انتقلت هذه النقطة الى نقطة و صار المحيط الظاهري عبارة عن المنحنى آ ت و هلم جرا وبناء على ذلك ينبغي دائما تحديد نقطة النظر المنسوب لها المحيط الظاهري لجسم ما عند ذكر هذا المحيط الظاهري حيث علم انه متغير بحسبها

ولما كان المحيط الظاهري للأجسام متغيرا بتغير نقطة البصر كان من اللازم الاتفاق على وضع مخصوص لنقطة البصر وتعين بحسبه المحيطات الظاهرية للأجسام التي يراد رسمها بواسطة طرق الهندسة الوصفية أعني بطريقة الاسقاط على مستويين متعامدين أحدهما أفقي والآخر رأسي ولذا قد اصطلح علماء هذا الفن على ان لا يعتبر في تعيين أي جسم بالرسم الوصف في من محيطاته الظاهرية سوى محيطه الظاهري المأخوذ بالنسبة لنقطة بصر موضوعة على بعد لانهائي بالنسبة للجسم المذكور كما أشرنا الى ذلك في بحثنا بمعنى انه عند تعيين المسقط الأفقي للجسم سه يعتبر الرسم ان عينه التي يتطربها الى هذا الجسم موضوعة على بعد لانهائي فوق الخط الرأسي المار باحدى نقط هذا الجسم أياما كانت تلك النقطة وعلى ذلك تصير جميع المستويات المماسية للسطح سه التي تتعين بها نقط المنحنى ا ب ج د رأسية فيمكن تعيينها بسهولة عندما اذا كانت حيثما اتفق بطرق بسيطة كما سنعرف ذلك قريبا فيما سيبقى

وأما المحيط الظاهري للجسم حينما يراد أسقاطه على المستوى الرأسي فتعتبر فيه عين

الرسم موضوعا امام المستوى الرأسى على بعد لانهاى منه فوق مستقيم مارياحدى  
نقط ذلك الجسم وعمودى على المستوى الرأسى للمسقط  
بمبدأ ٢٣٩ ينتج مما ذكر في البند السابق أن الجسم الذى يراد اسقاطه على مستوي  
المسقط الاعتياديين يلزم ان يراعى فيه محيطان ظاهريان اثنان وهما محيطه الظاهرى  
بالنسبة للمستوى الافقى الذى لاجل تعيينه يبحث عن نقط تماس هذا الجسم بجميع  
المستويات الرأسية الممكن رسمها مماسة له ومحيطه الظاهرى بالنسبة للمستوى الرأسى  
وهو الخط الجامع لنقط تماسه بجميع المستويات المماسه له التى تكون عمودية على  
المستوى الرأسى

ومن هنا يعلم أن المحيط الظاهرى لاي جسم بالنسبة للمستوى الافقى هو غير محيطه  
الظاهرى على المستوى الرأسى وهذا أمر بديهي يمكن البرهنة عليه بكيفية مستقرة  
وهي ان يقال ان نقطة البصر في الحالة الاولى غيرها في الحالة الثانية

بمبدأ ٢٤٠ قد ذكرنا في مبدأ ٢٣٩ وبعض القواعد اللازم اتباعها في عمل  
التنقيطات التى يجب اجراؤها في الرسم على الخطوط الاصلية وقلنا في مبدأ ٢٤١ انه لا يمكن  
تقيم تلك القواعد الا من بعد دراسة السطوح المنحنية والآن قد ان اوان تقيم تلك  
القواعد فنقول قد علم من تعريف المحيط الظاهرى للجسم بالنسبة للمستوى الافقى أن  
جميع الخطوط من أى جنس كانت الموجودة على سطح الجسم فوق هذا المحيط الظاهرى  
هى التى تكون مشاهدة بالنسبة للرسم المعتبر وجوده على بعد لانهاى فوق المستوى  
الافقى الذى يسقط الجسم عليه وان جميع ما كان تحت المحيط الظاهرى المذكور  
من الخطوط المرسومة على السطح المذكور تكون غير مشاهدة لذلك الرسم وأيضا  
علم من تعريف المحيط الظاهرى للجسم بالنسبة للمستوى الرأسى ان الخطوط التى  
تكون امام هذا المحيط الظاهرى هى التى تكون مشاهدة بالنسبة للرسم الذى يسقط  
الجسم على المستوى الرأسى وان التى خافه هى المخفية عليه بالنسبة للرسم المذكور  
اذا قرر هذا فطبق الاصطلاحات التى اتفقنا عليها في مبدأ ٢٣٩ فنقول ان الخطوط الاصلية  
التي تكون مرسومة على سطح جسم ما ينبغي أن تراعى في رسم مساقطها الشروط الآتية  
فالخطوط التى تكون فوق المحيط الظاهرى للجسم بالنسبة للمستوى الافقى في رسم  
مساقطها الافقية خطوطا كاملة والتي تحتها ترسم مساقطها الافقية نقطية

وثانيا عند رسم المسقط الرأسى لتلك الخطوط ينظر لوضعهما الفراغى بالنسبة للمحيط

الظاهر للجسم على المستوى الرأسى للسقط فما كان امامه يرسم مسقطه الرأسى كاملا وما كان خافه يرسم مسقطه نقطيا

انما ينبغي ان لا ينسى انه قد توجد خطوط من ضمن الخطوط التى على سطح الجسم يكون الواحد منها مشاهدا في أحد المسقطين ومخبأ في المسقط الآخر لان نقطة البصر ليست واحدة في الحالتين بحيث يجب الاعتناء جدا في تمييز ما يجب تنقيطه أو رسمه بالكامل من الخطوط الاصلية في كل مسقط من المسقطين على حدته وأما الخطوط الغير اصلية أى المساعدة فانه لا ينبغي مراعاة التميزات المتقدمة فيها بل براعى فيها ما قبل ضمن به ١٤٣ لا غير

بالمعاد وفي حالة ما يوجد في أحد الرسومات الوصفية مستوية ما غير محدود سواء كان من المعاليم أو من الاشياء التى يبحث عنها فلا ينبغي ان يعتبر له وجود حقيقى في الفراغ بل الواجب أن يفرض أن الموجود من المستوى هو أثره فقط ان كان من المعاليم وان كان من الاشياء التى يبحث عنها فيعتبر أن الذى يبحث عنه من المستوى هو أثره فقط لانه ان لم يعتبر المستوى كذلك وفرضنا له وجودا حقيقيا ترتب على ذلك انه يغطى معظم أو كل الاشياء الاخرى الموجودة تحته في شكل واحد ولا يخفى ما فى ذلك من الضرر العظيم اذ لا يتيسر حينئذ تمييز الاشياء التى تكون فوق أو امام المحيطين ان ظاهريين الجسم من الاجسام المرسومة من التى تكون تحت أو خاف هذين المحيطين وتضيع حينئذ الغاية المقصودة بالذات من الرسم الوصفى فينبغى حينئذ من الآن فصاعدا اعتبار هذا الشرط في جميع الاحوال ولو لم ينبغى فيها على لزوم اعتبارها أما اذا كان المستوى محدودا كوجه منشور أو هرم مثلا فلا بد من اعتبار وجوده في الفراغ وجودا حقيقيا وملاحظة ما يترتب على هذا الوجود من التنقيطات اللازمة

به ١٤٤ قد ذكرنا في به ١٤٣ أن النقط والخطوط تبين بمسقطيها على مستويين ثابتين هما مستوي المسقط وأشرنا في البند المذكور الى ان السطوح لا يمكن بيانها على هذا المنوال أعنى بالبحث عن مساقط جميع النقط والخطوط التى توجد عليها وقلنا ان هناك اعتبارات يجب اتباعها في بيان السطوح بالرسم الوصفى والآن نقول حيث ان النقطة الواحدة من سطح أى جسم يمكن ان يمر بها عدة خطوط مختلفة الاتجاهات فاذا تتبعنا حينئذ الطريقة المبينة في به ١٤٣ لاجل بيان سطح الجسم المذكور كانت النتيجة أننا نشحن مستويي المسقط بالنقط والخطوط التى من كثرتها وارتبائها لا يمكن المرسى

على الارتباطات والعلاقات التي بينها خصوصاً وأنه لا يستفاد ولا يفهم من مجموعها عند النظر إليها بهذه السطوح المعلوم ولا انحناءه كثيراً كان أو قليلاً ولا عدد طبائعه ان كان له طبائعت متعددة فلهذه الأسباب المجأت المحالة لاتباع الاعتبارات الآتية في بيان السطوح على العموم

أولاً حيث علم من التعريف المقرر في § ٧٧ أن السطح على العموم حادث من تحرك خط معلوم فيكون حينئذ لاجل بيانه بياناً واضحاً ان يعين على مستوي المسقط بجملة من أوضاع راسمه بحيث يكون عددها وتقاربها كافيين لان يظهر للعين استمرار سطح الجسم المعلوم وانحناءه وامتداد طبائعه

وثانياً حيث انه قد يتأني أن يكون للسطح الواحد جملة أنواع مختلفة من الرواسم فينبغي أن ينتخب من تلك الأنواع لبيان السطح أكثرها إيقاعاً وصلاحيته بالنسبة لبساطته أو انتظامه لبيان صورة السطح المذكور وفي بعض الأحيان لزيادة إيضاح صورته لا يكتفى ببيان رواسم نوع واحد بل يرسم نوعان من الرواسم مثلاً في السطوح التحركية ترسم عدة قطاعات جانبية وعدة موازيات وهذه هي الطريقة التي اتبعناها في الفصل السابق لاجل بيان السطوح التي رسمناها رسماً نظرياً

وثالثاً من النافع جداً أن يبين أثر السطح المعلوم على مستوي المسقط أعني خطي تقاطعه بهما وتبين أيضاً محيطاته من جهة الداخل أو من جهة الخارج ان كان له محيطات بهذه الصورة لانه متى علمت مساقط محيطاته علم بالتحقيق أنه لا توجد نقطة على السطح المعلوم الا وتسكون مساقطها منحصرة فيما بين مساقط تلك المحيطات الداخلية أو الخارجية وتلك المحيطات ليست شيئاً آخر سوى المحيطات الظاهرية للسطح المعلوم على مستوي المسقط التي شرحناها في § ٣٨ و § ٣٩ فلتراجع هناك

ومع كل ذلك يجب أن يلاحظ أنه متى كانت هيئة السطح المراد بيانه معلومة ومعهودة لنا من قبل فلا ينبغي أن ترسم جميع أنواع الخطوط المتقدمة آنفاً بل يمكن أن يقتصر في بيان ذلك السطح على رسم بعض تلك الخطوط أعني المهم منها ويصرف النظر عن الباقي وذلك لاجل جعل الرسم بسيطاً وسهلاً للفهم على قدر الامكان



\* (١٠٣) \*

\* (الفصل الرابع) \*

(في المستويات المماسية للسطوح الاسطوانية والمخروطية)

(وفي تقاطع حل الزاوية المجسمة الثلاثية)

بـ ١٤٢ المعلوم نقطة على سطح اسطوانة حيثما اتفق والمطلوب مدمسة ومماس لهذه الاسطوانة من النقطة المذكورة

فن الضروري قبل رسم هذا المستوى المماس يلزم أولاً ان تبين الاسطوانة المعلومه بالرسم على مستوي المسقط وبعد ذلك نبحث عن طريقة حل المسألة المفروضة ومن المعلوم ان الاسطوانة لا تعلم الا اذا علم دليلها واتجاه رواسيها فليكن دليل هذه الاسطوانة هو المنحنى ا ب ج د (شكل ٨٧ لوحة ٢٠) مثلاً المفروض أنه موجود في المستوى الافقي للمسقط وقد اعتبر ذلك المنحنى في شكلنا هـ ذا محيط دائرة لكن الطريقة التي سنجرى بها للحصول على المستوى المماس من بعد بيان الاسطوانة بالرسم تكون عمومية وممكناً اجراؤها ما كان جنس المنحنى الدليل الذي يفرض للأسطوانة ولنفرض أيضاً ان المستقيم (ا ب د ا ب) هو المستقيم الذي ينبغي لرأس الاسطوانة ان يكون موازياً له على الدوام في أثناء اتكائه على الدليل ا ب ج د

ولاجل بيان الاسطوانة بالرسم على مستوي المسقط نبحث عن محيطها الظاهريين على هذين المستويين ونبتدئ بالبحث عن محيطها الظاهري على المستوى الافقي فنقول ان هذا المحيط الظاهري بموجب بـ ١٣٩ هو الخط الجامع لنقط تماس جميع المستويات المماسية للأسطوانة المعلومه التي تكون رأسية ومما ثبت في بـ ١٣٢ يعلم ان كل مستو من تلك المستويات الرأسية يشتمل على رأس من رواسي الاسطوانة ويكون أثره الافقي هو عين المسقط الافقي لهذا الرأس ويفهم من ذلك ان هذا الاثر يكون مستقيماً موازياً الى ا ب ومن جهة أخرى حيث ان هذا المستوى مماس للأسطوانة بطول

الرأس المذكور فيكون حينئذ أثره الافقي مماساً لقاعدة الاسطوانة وهي المنحنى ا ب ج د لانه الورسمان من نقطة تقابل رأس التماس بالقاعدة مستقيمان مماساً لها لكان هذا المستقيم موجوداً في مستويها وهو المستوى افقي للمسقط وفي المستوى المماس للأسطوانة وبما انه لا يوجد مستقيم مشترك بين هذين المستويين سوى الاثر الافقي للمستوى المماس المذكور فيعلم حينئذ ان هذا الاثر يلزم ان يكون مماساً لقاعدة الاسطوانة وبناء على



ما ذكر اذ رسم لهذه القاعدة المماسان اب و ح د موازيين الى اب كان هذان المماسان  
عبارة عن الاثرين الافقيين المستويين رأسيين مماسين للاسطوانة بطول الراسمين  
المسقطين أفقياً على اب و ح د وعليه فيكون المسقطان الرأسيان هما عبارة عن  
المستقيمين آت و ح د المرسومين بالتوازي الى آ ب ومن ثم يعلم أن المستقيمين  
(اب و آت) و (ح د و ح د) هما المحيط الظاهري للاسطوانة على المستوى  
الافقي وكل راسم من سطحها وجد تحت هذين المستقيمين أعنى من الرواسم المتلاقية مع  
القاعدة في نصف الدائرة ا ح د يكون غير مشاهد في المسقط الافقي

وأما المحيط الظاهري للاسطوانة على المستوى الرأسي فانه يتحصل طبقاً لما في به ١٣٩  
بواسطة المستويين المماسين لها والعموديين على المستوى الرأسي المذكور ولا يخفى أن  
الاثرين الافقيين هذين المستويين يكونان عموديين على خط الارض ومماسين للقاعدة  
ا ح د وبناء عليه فيكون هذان الاثران هما ع ت و ح د ومن حيث ان هذين  
المستويين يماسان بالضرورة الاسطوانة بطول راسمها الخارجين من نقطتي التماس  
ع و ح اللذين ينسقطان بالطبيعة على (ع ف و ع ف) و (ح ه و ح ه) فيكون  
هذان الراسمان هما محيطها الظاهري على المستوى الرأسي للمسقط بحيث ان كل راسم  
من سطح الاسطوانة وجد خلف هذين الراسمين أعنى من الرواسم الخارجة من نصف  
الدائرة ع ا ح يكون غير مشاهد في المسقط الرأسي

ومن هنا يتضح ان رواسم الاسطوانة منقسمة الى أربعة أقسام من حيثية الظاهر منها  
والمنخبا على مستويي المسقط كما يستدل على ذلك من أقسام القاعدة فأول الرواسم  
الخارجة من القوس ا ح ظاهرة في الافقي مخبأة في الرأسي وثانياً الرواسم الخارجة من  
القوس ح د فانها عكس الاولى أعنى مخبأة المسقط الافقي ظاهرة الرأسي وثالثاً الرواسم  
الخارجة من القوس ع د فانها ظاهرة المسقطين ورابعاً الرواسم الخارجة من القوس  
ح ا فانها عكس المتقدمة أى أنها مخبأة المسقطين معاً ولا شك أن هذا هو مصداق  
ما تقدم في أواخر به ١٤٤

به ١٤٣ وانرجع الآن محل المسألة التي نحن بصدد حلها فنفرض أن م هي المسقط  
الافقي للنقطة المألومة على سطح الاسطوانة التي يراد منها المستوي المماس لتلك  
الاسطوانة ونقول ان هـ هذا المسقط الوحيد كاف لتعيين النقطة الفراغية المذكورة

لانه حيث كانت تلك النقطة موجودة على سطح الاسطوانة فيمكن تعيين مسقطها  
الرأسي بواسطة المسقط الافقي له ولذلك يقال لا بد وان يمر بهذه النقطة راس من رواص  
الاسطوانة وهذا الراس ينسقط أفقياً على م ل الموازي الى  $\text{إ ب}$  وبما أن المستقيم م ل  
متلاق مع القاعدة في نقطة ل فتكون اذن هذه النقطة اثر افقي لهذا الراس وعليه  
فيكون مسقطه الرأسي عبارة عن المستقيم ل ز الموازي الى  $\text{إ ب}$  فيلزم حينئذ  
للحصول على المسقط الرأسي لنقطة م ان يقام منها عمود على خط الارض ويمد حتى  
يتلاقى مع ل ز في نقطة م التي تكون بالضرورة مسقطاً رأسياً للنقطة المذكورة  
ومع ذلك فهناك حل آخر لانه لما كان المستقيم م ل ملاقياً للقاعدة في نقطتين مثل  
ل و فيمكن ان يقال ان نقطة و هي أيضاً اثر افقي لرأس ثان من رواص الاسطوانة  
منسقط كذلك على م و لكن مسقطه الرأسي هو و ز بحيث لو مد العمود م م حتى  
يتلاقى مع و ز في نقطة مثل م رأينا انه يوجد على الاسطوانة نقطة ثانية هي (م و م)  
متحدة المسقط الافقي مع نقطة (م و م) الاولى اذ ان كليهما منسقط أفقياً على نقطة  
م الوحيدة

ب ٤٤٤ اذا تقرر هذا وعلماً أن هناك نقطتين على سطح الاسطوانة منسقطتين أفقياً  
على نقطة م رأينا ان للمسئلة الاصلية حلان لنبدأ بأحدهما فنقول اذا اردنا ان نرسم  
من نقطة (م و م) الاولى مستويًا مماساً للأسطوانة يقال لاشك ان هذا المستوى  
يشتمل على الراس (م ل و م ز) المار بتلك النقطة وبناء عليه يكون الاثر الافقي  
لذلك المستوى مازاً من الاثر الافقي ل هذا الراس ثم لا يكون المستوى المذكور مماساً  
للالسطوانة بطول هذا الراس فلا شك انه يشتمل على المستقيم المماس للقاعدة في نقطة  
ل أعني المستقيم ل ص ويكون هذا المستقيم أثراً أفقياً له أى للمستوى المماس  
المطلوب ولاجل الحصول على أثره الثاني يبحث عن الاثر الرأسي للمستقيم (م ل و م ز)  
الموجود في هذا المستوى فيوجد أنه هو نقطة ز وعليه فيكون المستقيم ص ز هو  
الاثر الرأسي للمستوى المماس المطلوب لكن اذا وقعت نقطة تقاطع الاثر الافقي ط ص  
بخط الارض خارجاً عن حد الرسم يتصور بتقطة (م و م) مرور مستقيم مساعد مواز  
الى الاثر الافقي ل ص فيكون مسقطه الافقي م س موازياً الى ص ل ومسقطه الرأسي  
م س موازياً الى خط الارض فلو بحثنا عن الاثر الرأسي س ل هذا المستقيم كانت هذه  
النقطة أيضاً من نقط الاثر الرأسي للمستوى المماس وعليه فيكون س ز هو هذا

الاثـر وعلى كـلا الحـالات فان هـذه العـملية يصـح اسـتعمالـها دائما لـاجل التـحقيق  
وأما المـستوى المماس لـلاسطوانة فـي نـقطة (م و م) فانه يـتبعـن بمـلاحظة أن راسـم  
التماس يـكون منـسـطاً فـي هـذه الحـالة أفـقياً عـلى م و وراسـيـا عـلى م و وحيـث نـذ فـلورسـم  
من الاثـر و هـذا الرسـم مـستـقيم مثـل و لا مماس لقاعدة الاسطوانة كان هـذا المماس  
أثـراً أفـقياً لـلمستوى المماس الجـديد و يـتبعـن أثـره الراسـي لـا و كـما تـقدم بالبحـث عـن نـقطة  
نـ التي يـتلاقـي فـيها راسـم التماس مع المـستوى الراسـي لـلسـقط وان لـزم الحـال يـستعان  
بـالافـق المـار بـنـقطة (م و م) الـذي تـتبعـن بـواسـطته نـقطة ثـالثة من الاثـر المـذكـور  
بـ١٤٥ يدبغى ان يلاحظ انه حيث كان المستويان المماسان ط ص و ط ل م  
اللذان قد عينا هما آ ن فامشتمان على راسمين من رواسم الاسطوانة و كان هذان  
الراسمان متوازيين من خاصية توازي جميع رواسم الاسطوانة فينبغي حينئذ ان يكون  
خط تقاطع المستويين المماسين المذكورين مستقيماً موازياً لرواسم الاسطوانة وبناء  
على ذلك اذا عينا بموجب ما تقدم خط تقاطع هذين المستويين وكان هو (ط م و ط ل م)  
لزم ان يكون هـذا المستقيم موازياً بالضبط الى (إ ب و إ ب) وهـذا نتجـت فـي آخر  
للأعمال الرسمية

بـ١٤٦ بناء على الاسباب المندرجة في بـ١٤٥ يلزمنا فقط البحث عن اثـرات  
المستويات المماسية بدون ان نعتبر ان هـذه المستويات موجودة وجوداً حقيقياً لكن  
بما ان هـذه الاثـرات وجوداً فينبغي حينئذ ان نبين أجزائها الخبئة بمسقطى الاسطوانة  
على المـستوى الأفـق والمـستوى الراسـي بـخطوط نقطية وأما رواسم الاسطوانة المتنوعة  
فانه كان يمكن ان نبين الذي استعملناه من المساعدة على إيجاد المستويات المماسية بـخطوط  
مجزئة طبقاً لما اصطالحنا عليه قبل لكننا قد فرضنا اعتبار جميع هـذه المستقيـمات كـعدة  
رواسم موجودة على الاسطوانة وجوداً حقيقياً لـاجل أن مجموع هـذه الرواسم يبين لنا  
جيداً مـباشرة السطح ومن ثم وجب علينا بيان هـذه الرواسم بـخطوط كاملة ان كانت  
مشاهدة أو نقطية ان كانت غير مشاهدة ومعرفة المشاهد والغير المشاهد منها راجع  
لما تقدم في بـ١٤٦ وفي بـ١٤٧

بـ١٤٧ اذا أريد تعيين المنحنى الذي تنفذ فيه الاسطوانة من المـستوى الراسـي لـلسـقط  
فيكفي لذلك أن يبحث عن الاثـرات الرأسية لرواسم هـذا السطح المتنوعة فيحصل بذلك  
نـخط مثـل نـ و نـ و هــ و هــ وهذا الخط يكون في مثالنا هـذا قطعاً ناقصاً ومماساً للـاثـرين

الرأسين من المستويين المماسين في نقطتي  $ك$  و  $د$  لأن هذين المستويين يشتملان على جميع المستقيمات المماسية للمنحنيات المرسومة على سطح الاسطوانة من جميع نقط راس تماس كل منهما ولاجل الحصول على أعلا نقطة وأولى نقطة من المنحنى  $فَ دَ هَ$  ... يكفي أن نعين الرأسين الخارجين من نقطتي  $ع$  و  $ح$  اللتين تماس القاعدة في كل منهما يكون موازيا إلى خط الأرض لأن المستوي المماس للاسطوانة في كل واحد من هذين الرأسين يقطع المستوي الرأسى في مستقيم مواز لخط الأرض أعنى أفقيا فتلا المستوي المماس بطول الراس  $(ع ش و ع ش)$  يقطع المستوي الرأسى في مستقيم أفقى يكون بالضرورة مماسا للمنحنى  $فَ دَ هَ$  ... وعليه فتكون نقطة  $ش$  هي أعلا نقطة لأن المماس للمنحنى فيها أفقى وبمثل ذلك تكون نقطة  $ش$  هي أولى نقطة ويجب أن يلاحظ أن هذه النتيجة تكون صحيحة مهما كانت الاسطوانة المعلومة حيثما اتفق حتى ولو لم تكن قاعدتها دائرة

بشأن المطالب مدمستومماس لاسطوانة وماربنة نقطة خارجة عن سطحها لذلك نفرض أن الاسطوانة المعلومة هي نفس الاسطوانة المبينة في (شكل ٨٧ لوجه ٢٠) وأن النقطة المبينة في الفراغ هي نقطة  $(هـ و د)$  ونرسم من هذه النقطة مستقيما مثل  $(هـ ط و د ط)$  موازيا لرأس الاسطوانة المعلومة فيكون بالضرورة هذا المستقيم موجودا بأكمله في المستوي المماس الذى نبعث عنه لأن المستوي المذكور مهما كان وضعه لا بد وأن يكون مشتملا على أحد رؤس الاسطوانة وبما أن المستقيم  $(هـ ط و د ط)$  مرسوم من نقطة  $(هـ و د)$  التى يراد تقرير المستوي المماس بها وموازا إلى مستقيم موجود فى ذلك المستوي المماس وهو رأس التماس فيكون المستقيم  $(هـ ط و د ط)$  موجودا فى المستوي المماس المطلوب وينافعه إذا بحث عن الأثر الأفقى لهذا المستقيم علمت لنا نقطة من أثر المستوي المماس المطلوب وبما أن هذا الأثر يجب أن يكون مماسا لقاعدة الاسطوانة طبقا لما تقدم فى ٣٢ فلا جرم أن يكون هو أحد المماسين طلعه  $ر$  طوع لا الذين لا يمكن أن يرسم للقاعدة من نقطة  $ط$  مماسات سواهما ومن ذلك يظهر أن هذين المستويين يمكن أن يشتملا على المستقيم تعيين أثرهما الرأسين بالسهولة لأن كلا هذين المستويين مشتمل على المستقيم  $(ط هـ و ط د)$  وعلى الرأس المخرج من إحدى نقطتي التماس  $ل$  أو  $و$  فبالضرورة

يكون الاثران الرأسية ان المطلوبان مابين بالاثرات الرأسية لهذه المستقيمتين واذن فيكون أحدهما هو  $\text{تر}^2$  والثاني  $\text{تر}^2$  وفضلا عن ذلك فإنه يمكن أن يستعان على تعيين هذين الاثرين أو على تحقيقهما ان كانا معينين بتقرير مستقيم أفقي من نقطة (هـ و هـ) موجود في المستوى الذي يرسم تعيين أو تحقيق أثره الرأسية من المستويين المذكورين كما فعل هذافي به ١٤٤٤ ويبحث عن الاثر الرأسية لهذا الافقي

(تنبيه) اعلم أن السبب في وقوع نقطتي التماس ل و هـ على مستقيم واحد مواز الى  $\text{إ ب}$  في مسألتنا هذه ما هو الا لا كونهما استعمالا لهما شكل المسألة الماضية لكن متى أخذت نقطة (هـ و هـ) بالاختيار المطلق فان هذه الحالة لا تحصل دائما وبالجملة فان ذلك لا يغير شيئا من البراهين والاجراءات التي استعملناها في حل المسألة الحالية

به ١٤٤٩ المطلوب رسم مستوئع مساس لاسطوانة ومواز لمستقيم معلوم

لنفرض أن الدائرة  $\text{ا ب}$  صه ح ح (شكل ٨٨ لوحه ٢٠) الموجودة في المستوى الافقي للسقط هي قاعدة الاسطوانة المعلومة وان المستقيم (هـ ف و هـ ف) أحد رواصها ثم نبحث عن محيطها الظاهريين على المستويين الثابتين كما فعل ذلك في به ١٤٤٢ ثم بعد ذلك نقول اذا فرضنا أن المستقيم الفراغي المعلوم الذي يراد جعل المستوى المماس المطلوب موازيا له هو المستقيم (م هـ و م هـ) فيؤخذ على هذا المستقيم نقطة اختيارية ولتكن نقطة (م و م) التي هي أثره الرأسية ويمرر بها مستقيم مثل (م ا و م ا) مواز لرواص الاسطوانة ثم يمرر بها هذين المستقيمين مستوي فيكون أثره الافقي بالضرورة هو المستقيم  $\text{ا هـ}$  ومن المعلوم أن هذا المستوى يلزم أن يكون موازيا

للمستوى المماس المطلوب لان هذا المستوى مماس يشتمل بالطبيعة على رواصه من رواص الاسطوانة وبناء على ذلك يكون موازيا لكل من المستقيمين (م ا و م ا)

و (م هـ و م هـ) الموجودين في المستوى الذي أثره الافقي هو  $\text{ا هـ}$  وحيث انضح لنا توازي المستوى المماس المطلوب الى المستوى  $\text{ا هـ}$  فيكون بالضرورة الاثر الافقي

للمستوى المماس المذكور عبارة عن أحد المستقيمين صه و طه المماسين للقاعدة والموازيين الى  $\text{ا هـ}$  واذن فيكون لهذه المسئلة حلان ايضا وتعين الاثران

الرأسيان هذين المستويين مع السهولة بمساعدة رواص التماس (صه م و صه م) للمستوى الاول ورأص التماس (طه و طه) للمستوى الثاني وبما ان المستويين

المماسين في الحالة الراهنة متوازيان يلزم أن يكون اثرهما الرأسانيان متوازيين أيضا  
 منه ان ينتج مما تقدم أنه اذا كانت الاسطوانة التي يراد بيانها بالرسم على مستوى  
 المسقط قائمة وقاعدتها في المستوى الافقي فيكفي لاجل أن تصبح تلك الاسطوانة معينة  
 معلومية قاعدتها فقط لان الرواسم يكون اتجاهها في هذه الحالة معينة بما أنها تكون  
 كلها عمودية على المستوى الافقي وذلك مبني على خاصية الاسطوانة القائمة فان الاسطوانة  
 القائمة تعرف بأنها الاسطوانة التي تكون رواسمها عمودية على مستوى قاعدتها فاذا  
 تقرره هذا ونرض أن المطلوب يبين ان الاسطوانة القائمة التي قاعدتها هي الدائرة  
 ا ب ح د ه و (شكل ٨٩ لوح ٢١٤) المعتبرة في المستوى الافقي للمسقط بطريقة المساقط  
 يقال ان المحيط الظاهري لتلك الاسطوانة على المستوى الافقي هو في هذه الحالة نفس  
 القاعدة ا ب ح د ه و لان الاسطوانة المماسية للسطح والعمودية على المستوى الافقي التي  
 بها يتعين المحيط الظاهري تؤلف في هذه الحالة الى نفس الاسطوانة القائمة المعلومة وأما  
 المحيط الظاهري لها على المستوى الرأسى فلا يجاده تحصر الاسطوانة بين مستويين مماسين  
 لها وعموديين على المستوى الرأسى للمسقط وفي هذه الحالة يكون هذان المستويان عموديين  
 على المستوى الافقي للمسقط أيضا لكونهما مشتملين على مستقيمين عموديين على المستوى  
 المذكور وهما راسماتهما بالاسطوانة واذن يكون أحد المستويين المذكورين  
 هو المستوى ا ا' الذي اثره على مستقيم واحد عمودى على خط الارض ومماس  
 للقاعدة واثر المستوى الثانى على مستقيم ه ه' المماس لها أيضا وعمودى على خط  
 الارض ولكون المسقطين الرأسيين لراسماتهما هذين المستويين بالاسطوانة  
 منطبقين على الاثرين الرأسيين ا ا' و ه ه' فيكون هذان المستقيمان هما المحيط  
 الظاهري للاسطوانة على المستوى الرأسى ولو فرضنا ان الاسطوانة محدودة من الاعلا  
 بدائرة موازية للمستوى الافقي تنسقط أفقيا على ا ب ح د ه و ورأسها على المستقيم ا ا' ه ه'  
 الموازى لخط الارض فيكون المحيط الظاهري للاسطوانة على المستوى الرأسى عبارة  
 عن المستطيل ا ه ه' ا'

فلو اردنا ان نرسم مستويا مماسا لتلك الاسطوانة من النقطة المنسقطة أفقيا على و لكنفى  
 ان نرسم من المسقط مستقيما ولم مماسا للقاعدة فيكون هو الاثر الافقي للمستوى المماس  
 المطلوب ولكون المستوى المذكور يلزم ان يكون عموديا على المستوى الافقي لمروره براسم  
 من رواسم الاسطوانة فيكون اثره الرأسى عبارة عن م ه العمودى على خط الارض .

وأما إذا رسم المستوى المماس للأسطوانة في إحدى نقط الرأس الخارج من نقطة وكان المستوى المذ كورد موازياً إلى المستوى الرأسى للمسقط وليس له بناء على ذلك أثر رأسى وإنما أثره الأفقى هو المستقيم وذلك الموازى لخط الأرض وخط تقاطع هذا المستوى مع المستوى عم . يلزم أن يكون رأسياً لأنه على ما ثبت في به ٤٥ لا يلزم أن يكون موازياً لرأس الأسطوانة فهو منسقط أفقياً حيث نزل على نقطة ل محل تقاطع الأثرين الأفقيين للمستويين المماسين ورأسياً على المستقيم ل العمودى على خط الأرض به ٤٥ وبالعكس إذا فرضنا أن الأسطوانة القائمة المعلومة قاعدتها موجودة في المستوى الرأسى وكانت دائرة مثل آ د ه و د ح ت (شكل ٩٠ لوحة ٢١) كانت نفس تلك الدائرة محيطاً ظاهرياً للأسطوانة المعلومة على المستوى الرأسى ومحيطها الظاهرى على المستوى الأفقى هو المستطيل ا ه ه ا ويكون المستوى المماس للأسطوانة في أى نقطة من سطحها عمودياً على المستوى الرأسى فأثره الرأسى هو المماس للدائرة آ د ه و د ح ت . . . في المسقط الرأسى لنقطة التماس وأثره الأفقى مستقيم عمودى على خط الأرض وذلك كالمنسوبى عم . وأيضاً المستوى ل د ع المماس للأسطوانة في النقطة المنسقة رأسياً على يكون موازياً للمستوى الأفقى وليس له أثر أفقى ومتقاطع مع المستوى عم في المستقيم (ل د ر ل) العمودى على المستوى الرأسى

به ١٥٤ د في الأحوال المتقدمة جميعها قد فرضنا دائماً أن قاعدة الأسطوانة موجودة في أحد مستويي المسقط والآن نقول إذا كان دليل الأسطوانة المعلومة منحنيًا موجوداً في الفراغ كالدائرة (ا ب ح د . . و آ ح) (شكل ٩١ لوحة ٢١) الكائنة في مستواً أفقى مرتفع عن المستوى الأفقى للمسقط ولذلك انسقطت أفقياً على دائرة مساوية لها ورأسياً على المستقيم آ ح الموازى لخط الأرض فيكون محيطها الظاهرى على المستوى الأفقى مركباً من المماسين ه ب و د الموازيين إلى المسقط الأفقى ه ب للمستقيم المبين لاتجاه رؤس الأسطوانة ثم من نصف الدائرة ب ع دى وأما المحيط الظاهرى على المستوى الرأسى فإنه يتعين برسم المماسين ا آ د ح العموديين على خط الأرض ومد المستقيمين آ ح و ح ط من تقطبي آ د الموازيين إلى ه ب ويكون حينئذ هذا المحيط الظاهرى مركباً من المستقيمين آ ح و ح ط ومن المستقيم آ ح الذى هو المسقط الرأسى لدليل الأسطوانة

فاذا ارى درسم المستوى المماس لهذه الاسطوانة من النقطة المرسومة أفقياً على م كان  
لذلك طريقان الاول ان يتصور امتداد الاسطوانة المعلومة من جهة قاعدتها الى ان  
تقطع المستوى الأفقي للمسقط في منحن و يعتبر بعد ذلك هذا المنحن قاعدة جديدة  
للالسطوانة فيؤخذ حينئذ حل المسئلة الى الحل المبين في ٤٤٤ د ويكفي لتعيين خط  
تقاطع الاسطوانة المعلومة بالمستوى الأفقي ان يبحث عن الاثرات الأفقية لكافة  
رواسيها فتعين عدة نقط مثل ا ب ج د ع د ح . . الخ وتجمع بمنحن مثل  
ا ب ج د الذي يكون في مسلة اتنا هذه دائرة مساوية لقاعدة الاسطوانة الاصلية  
أعني للدائرة ا ب ج د و بتطبيق جميع ما قيل في ٤٤٤ د على الاسطوانة المعلومة  
باعتبار قاعدتها التي في المستوى الأفقي للمسقط يتعين المستويان ل ل ا و ك ص ط  
المماسان للاسطوانة في نقطتي ( م د م ) و ( م د م ) ولومت الاسطوانة في اتجاه  
مضاد للذي مدت نحوه في الحالة الاولى لقطع المستوى الرأسى في منحن يمكن اخذ  
قاعدة لها ونجرب عليه العمل كما أجريناه على القاعدة التي في المستوى الأفقي ولا فرق  
بين الحالتين

( الطريقة الثانية ) يصح اجراء العمل على نفس قاعدة الاسطوانة المعتبرة في الفراغ ولذلك  
يرسم من نقطة م مسقط نقطة التماس المعلومة مستقيم مثل م س ع مواز الى ه ب  
ثم نسقط نقطتي س و ع وهما نقطتا تقابلها بالمسقط الأفقي للقاعدة على المستوى  
الرأسى وبعد ايجاد مسقطي الرأسين س و ع يرسم من ه ب المسقطان الرأسيان  
ع ق و س ق للرأسين المرسطين أفقياً على م س ع ثم يقام العمود م م الذي به  
يتعين المسقطان الرأسيان م و م لنقطتي التماس المشتركتين في المسقط الأفقي م ثم  
لاجل تعيين المستوى المماس للاسطوانة في احدى هاتين النقطتين يرسم مستقيم  
مماس للقاعدة ( ا ب د و س آ ) في نقطة تقابل الراس المار بالنقطة المذكورة  
مع القاعدة وتعين مسقطي هذا المماس ثم يلاحظ بمقتضى ٤٤٤ د ان هذا المماس  
يوجد في المستوى المماس المطلوب وبناء عليه فياتحاد هذا المماس مع راس التماس  
يمكن تعيين المستوى المماس للاسطوانة لانه هو المستوى المار بهما وحيث ان هذه  
العملية سهلة جداً فلا تفت لبيانها في الشكل بالرسم خوفاً من تكثير المخطوط الذي  
ينبغي عليه ترتيبك الشكل وصعوبة فهم أجزائه



(تنبيه) اذا كانت قاعدة الاسطوانة منحنيًا غير الدائرة سواء كانت في المستوى الافقي أو في الفراغ وعموماً مهما كان وضع تلك القاعدة وشكلها ومهما كان اتجاه رؤس الاسطوانة فالعمل واحد لا يختلف عما تقدم الا ببعض تغيرات يسيرة يقتضيها تغير الوضع وأما نفس طريقة الاجراء فانها عمومية لا تغير فيها

بـ ١٥٣ تنبيه قبل فقل باب الكلام على مسائل تماس الاسطوانات بالمستويات ينبغي ان نلاحظ انه لا يمكن أن يكلف المستوى بان يكون مماساً لسطح من هذه السطوح اعني السطوح الاسطوانية بشرط أن يمر بمستقيم معلوم لانه قد رأينا في بـ ١٣٢ ان المستوى المماس لسطح اسطوانة في نقطة ممسـه في طول الراس المار بتلك النقطة ويفهم من ذلك أن شرط تماس الاسطوانة بمسـه وفي نقطة واحدة يشتمل في باطن الامر على شرطين لان راس المماس يكفي لتحديد نقطتان فكأن المستوى المماس مجبور بحسب خاصيته على أن يستوفي شرطين ولولم يكلف الا بشرط واحد فاذا أضفت على شرط تماسه للاسطوانة شرطاً آخر وهو مروره بمستقيم معلوم ولا يخفى ان هذا الشرط مشتمل على شرطين أيضاً فكأننا كلفنا المستوى بان يمر من أربع نقط مع أنه معلوم ان ثلاث نقط تكفي لتقريره في العادة وحيث ان الشرط الرابع زائد والمسئلة تكون مستحيلة الحل لكن اذا كان المستقيم المعلوم موازياً لرأس الاسطوانة فتكون المسئلة ممكنة الحل وتؤول الى مسئلة بـ ١٤٨ لان مرور المستوى المماس بالمستقيم الخارج عن الاسطوانة لم يكن في هذه الحالة الا كمروره بنقطة واحدة خارجة عنها وبيان ذلك انك لو أخذت على المستقيم المعلوم نقطة وحيدة ورسمت مستويًا مماساً للاسطوانة ومارا بتلك النقطة رأيت ان هذا المستوى يمر من طبيعته بكامل المستقيم المذكور لانه مار بنقطة موجودة في المستوى المذكور وموازياً لمستقيم موجود فيه وهو راس التماس

بـ ١٥٤ المعلوم نقطة على سطح المخروط والمطلوب مدمستومماس له منها

ليكن المنحنى ا ب د (شكل ٩٢ لوح ٢٢٩) المعتبر في المستوى الافقي هـ ودليل المخروط ولتكن نقطة (س د س) رأسه فنبتدي أولاً بالبحث عن المحيط الظاهري لهذا السطح على المستوى الافقي ولذلك نبحث بمقتضى بـ ١٣٩ عن جميع المستويات المماسية له التي تكون عمودية على المستوى الافقي للسقط ومن حيث ان الاثر الافقي لكل مستوٍ من هذه المستويات يكون متعامداً مع المسقط الافقي لرأسه بالمخروط فهذا يدل على ان الاثر الافقي المذكور يكون ماراً بنقطة س وأيضاً من حيث ان

هذا الاثر يكون مماسا للقاعدة لانه تقدم في <sup>١٣٤</sup>د أن المستوى المماس للخروط  
يسه بطول راسه من رؤسهما فيؤخذ حينئذ من ذلك ان المماسين <sup>س ا و س ب</sup>  
المرسومين من نقطة <sup>س</sup> هما الاثران الافقيان للمستويين المماسين للخروط وعموديهين  
على المستوى الافقى وهما <sup>س ا و س ب</sup> وهذا المماسان هما المحيط الظاهري للخروط على المستوى  
<sup>(س ب و س ا)</sup> بحيث ان كل راسم وجد تحتها أعنى كل راسم من الرؤس التي تخرج من الجزء  
ا ب من القاعدة يكون غير مشاهد على المستوى الافقى وكل راسم يخرج من القوس  
الباقى من القاعدة يكون بعكس ذلك أعنى مشاهدا عليه

وأما المحيط الظاهري على المستوى الرأسى فانه يتحصل طبقا لما علم في <sup>١٣٩</sup>د بالبحث  
عن المستويات المماسية للخروط التي تكون عمودية على المستوى الرأسى للمسقط وبناء  
على ذلك فالاثرات الافقية لهذه المستويات يلزم أن تكون عمودية على خط الارض  
ومماسية بمقتضى <sup>١٣٤</sup>د للقاعدة ا ب و اذن فالمماسان <sup>ث د و د ع</sup> يكونان  
هما الاثرين الافقيين للمستويين الممكنين المماسين للخروطين وعموديهين على  
المستوى الرأسى وأثرهما الرأسى ان يمران بالضرورة بنقطة <sup>س</sup> أعنى المسقط الرأسى  
لرأسى المخروط ويكونان هما <sup>ث س و د س</sup> ومن حيث ان هذين المستويين مماسان  
المخروط بطول الراسمين <sup>(ث س و د س)</sup> و <sup>(د س و د س)</sup> يؤخذ من ذلك ان  
هذين المستقيمين هما المحيط الظاهري للسطح منسقطا على المستوى الرأسى وبناء عليه  
في كل راسم وجد خلف هذين المستقيمين أعنى من الرؤس الخارجة من القوس <sup>ث ا و د ا</sup>  
يكون غير مشاهد في المسقط الرأسى وبالعكس جميع الرؤس التي توجد امامهما تكون  
مشاهدة المسقط الرأسى

بـ <sup>١٥٥</sup>د وانرجع الآن لحل مسئلتنا الاصلية فنفرض ان نقطة <sup>م</sup> هي المسقط  
الافقى للنقطة المعلومة ولا يخفى انه لا ينبغي اتخاذ مسقطها الرأسى مجانا أى بالاختيار  
لانه حيث كانت هذه النقطة موجودة على سطح المخروط فلا بد أن تكون موجودة على  
راسم من رؤسهما وهذا الراسم يلزم أن ينسقط أفقيا على <sup>س م</sup> وهذا المستقيم يمكن أن  
يعتبر أثره الافقى في نقطة <sup>ه</sup> أو في نقطة <sup>ح</sup> فيكون مسقطه الرأسى هو <sup>س ه</sup> أو <sup>س ح</sup>  
فاذا أسقطت نقطة <sup>م</sup> عليها بعمود على خط الارض تحصل للنقطة المعلومة حلان  
احدهما <sup>(م و م)</sup> والثانى <sup>(م و م)</sup>

بـ ١٥٦ (شكل ٩٢ لوح ٢٢٤) اذا قرر هذا فله بحث عن المستوى المماس للمخروط في نقطة (م و م) الاولى ونقول ان هذا المستوى يشتمل بالضرورة على الرأس (س ه و س ه) ويمس المخروط بطول ذلك الرأس طبقا لما في بـ ١٤٤ وبناء على ذلك يكون الاثر الافقي لهذا المستوى عبارة عن المستقيم ط ي و المماس للقاعدة وأما أثره الرأسى فانه يمر بنقطة (ن و ن) التي تقابل فيها رأس التماس مع المستوى الرأسى للمسقط ثم بنقطة و التي هي نقطة تقابل الاثر الافقي ط ه بخط الارض. لكن من حيث ان نقطة و ه هذه وقعت في شكلنا هـ لذا خارجا عن حدود الرسم فلاجل استعواضها بنقطة أخرى من الاثر الرأسى للمستوى يتوهم مرور مستقيم أفقي في المستوى المماس المطلوب من نقطة (م و م) وليكن (م ص و م ص) هو هذا الافقي فيقابل المستوى الرأسى في نقطة ص ه وتكون تلك النقطة نقطة ثانية جديدة من الاثر الرأسى و ص ه للمستوى المطلوب

وبمثل ذلك يعين المستوى المماس لسطح المخروط في نقطة (م و م) الثانية بان يقال ان رأس التماس يكون في هذه الحالة عبارة عن المستقيم (س ح و س ح) وعلى هذا يكون المماس ح ع للقاعدة هو الاثر الافقي للمستوى المماس الجديد ولاجل تعيين أثره الرأسى ع ف ي بحث عن نقطة و التي هي نقطة تقابل رأس التماس (ح س و ح س) بالمستوى الرأسى أو يستعان كما تقدم بالا فقي (م ص و م ص) السكائن في المستوى المماس الذي نحن بصدد تعيينه

بـ ١٥٧ ينبغى ان يلاحظ أنه لداعى اشتمال كل واحد من المستويين المماسين اللذين قد تعينا انفاعلى رأس من رؤس المخروط فكل منهما يمر حينئذ برأس المخروط (س و س) ومن ذلك ينتج أنه اذا بحث عن خط تقاطع هذين المستويين وهو المنسقط أفقيا على ط م ورأسيا على ط م فن الضرورى ان يمر المستقيم الاول بنقطة س والثانى بنقطة س وهذا فيه تحقيق للاعمال المتقدمة وفضلا عن ذلك ينبغى أن يكون الاثران الرأسىان لهذين المستويين مماسين للمنحنى تقاطع المخروط بالمستوى الرأسى في نقطتي ن و ن وهذا المنحنى يتعين بالبحث عن الاثران الرأسية لكافة رؤس المخروط وتجمع بمنحنى

بـ ١٥٨ المطلوب مدمستوى مماس لسطح المخروط من نقطة معلومة خارجا عنه (شكل ٩٣ لوح ٢٢٤) ليكن الخط ا ث ب هو قاعدة المخروط ولتكن نقطة

(س و س) رأسه فيبحث كما تقدم عن المحيطين الظاهريين للسطح على مستويي المسقط  
 ويفرض ان نقطة (هـ و هـ) هي النقطة المعلومة في الفراغ التي يراد جعل المستوى  
 المماس المطلوب مازامنها ومن حيث ان المستوى المماس المطلوب لا بد أن يشتمل على  
 راس من المخروط فهو حينئذ برأسه (س و س) وبناء على ذلك يشتمل هذا المستوى  
 المماس على المستقيم (س هـ و س هـ) وحينئذ فلو بحثنا عن الاثر الافقي (ط و ط)  
 لهذا المستقيم ورسم منه المماسان ط هـ و ط ح ع للقاعدة كان هذان المستقيمان  
 اثرين افقيين للمستويين المماسين الموفيين لمنطوق المسئلة وأما اثرهما الرأسيان فانهما  
 يتعينان بواسطة المستقيم (س هـ و س هـ) الموجود في كلا المستويين المطلوبين  
 أو بمساعدة راسي تماس هذين المستويين وهما الراسمان (س هـ و س هـ)  
 و (س ح و س ح) وكان يمكن أيضا ان يشتمل مستقيم افقي مساعد يمد من نقطة  
 (هـ و هـ) في كل واحد من المستويين كما أجرينا ذلك جملة مرار  
 به ١٥٩ المطلوب إيجاد مستوي يكون مماسا لمخروط معلوم وموازيا لمستقيم معلوم  
 أيضا

(شكل ٩٣ نوحه ٢٢) اذا حفظنا المعاليم المتقدمة على حالها وفرضنا أن (م هـ و م هـ)  
 هو المستقيم الذي يراد جعل المستوى المماس موازيا له وقلنا من حيث ان هذا المستوى  
 يلزم ان يمر برأس المخروط فلورسم من هذه النقطة مستقيما مثل (س ط و س ط)  
 موازيا الى (م هـ و م هـ) لكان المستقيم المرسوم هكذا موجودا في المستوى المطلوب  
 وبناء على ذلك فالأثر الافقي (ط و ط) لهذا المستقيم يكون نقطة من الاثر الافقي  
 للمستوى المماس وحينئذ فالأثر الافقي للمستوى المماس المذكور لم يكن سوى واحد  
 المستقيمين ط هـ و ط ح ع المرسومين من نقطة ط مماسين للقاعدة ومن هنا يعلم  
 ان لهذه المسئلة حلان أيضا ويعين الاثران الرأسيان لهذين المستويين كما في البند  
 السابق

به ١٦٠ من حيث ان كل مستوي مماس لمخروط في نقطة من سطحه ممس هذا المخروط  
 في طول راسه من روايته كما يؤخذ ذلك من به ١٣٤ فالتنبية الذي اشرنا اليه في به ١٥٣  
 يطبق هنا على الحالة الراهنة ومنه ينتج انه لا يمكن ان يكاف المستوي بان يكون مماسا  
 لمخروط ومآرا في آن واحد بمستقيم أو بنقطتين معلومتين أيضا ما لم يكن المستقيم المعلوم  
 أو المستقيم الواصل بين النقطتين المعلومتين مآرا من طبيعته برأس المخروط لان ذلك

مما يصير المسئلة شبيهة بالمحالة التي لم يكن فيها سوى نقطة واحدة خارجة عن المخروط  
ويراد تقرير المستوى المماس بها كما رأينا ذلك في به ١٥٨ د

\*(تنبيه)\* قبل أن نقيم هذا الفصل نرى أنه من النافع أن نضيف إليه بعض مسائل  
تطبيقية على ما تقدم ونبين للطالب طرق حلها على وجه الاختصار بدون أن نعمل عنها  
الرسم اللازم وذلك لكف المجتهدين من التلامذة بأن يعملوا بأنفسهم الرسومات التي تحل بها  
تلك المسائل

به ١٦١ د المعلوم نقطة والمطلوب أن يمد منها مستوى يصنع مع المستوى الأفقي زاوية  
معينة مثل ا

لذلك تؤخذ بالاختيار نقطة على المستقيم المعلوم وينزل منها مستقيم عمودي على المستوى  
الأفقي ومستقيم آخر مائل عليه بشرط أن يكون هذا المستقيم المائل موازيا إلى المستوى  
الرأسي للسقط وأن يكون مسقطه الزاوي صانعا مع خط الأرض زاوية مساوية إلى ا  
وحيث إذا تصورنا أن هذا المائل يدور حول المستقيم الرأسي فإنه يولد مخروطا قائما  
أثره على المستوى الأفقي دائرة يمكن تعيينها بسهولة ورؤس هذا المخروط تكون كلها  
مائلة على الأفق بمقدار زاوي يساوي ا وبناء على ذلك إذا رسمنا مستويا مماسا لهذا  
المخروط ومازّا بالمستقيم المعلوم ولا يخفى أن ذلك ممكن إذا لمستقيم المعلوم مارا برأس  
المخروط فالمستوى المماس المتحصل هكذا هو بالضرورة المستوى الموفق للشروط المقررة  
في منطوق المسئلة

به ١٦٢ د المطلوب رسم مستو مماس لاسطوانة معلومة بشرط أن يكون مائلا على المستوى  
الأفقي بزاوية قدرها معين يرمز لها بحرف ا

لذلك يرسم كما في المسئلة المتقدمة مخروط تحركي رؤسه مائلة على المستوى الأفقي بقدر ا  
ثم بعد ذلك لو دمر رأس المخروط مستقيم موازيا إلى رؤس الاسطوانة ومرر بهذا المستقيم  
مستويا مماسا للمخروط السابق علينا سوى أن نرسم مستويا مماسا لاسطوانة المعلومة  
بشرط أن يكون موازيا إلى المستوى المماس للمخروط الذي صار تعيينه وهي مسئلة تحل  
كما في به ١٤٩ د يرسم مستقيم مماس لقاعدة الاسطوانة وموازيا لآخر الأفقي من المستوى  
المماس للمخروط فيكون هو أثر المستوى الموفق لمنطوق المسئلة ويتعين أثره الرأسي كما مر  
أنما يجب التنبيه على أن هذه المسئلة قد تكون مستحيلة التحل وذلك في حالة ما يكون  
المستقيم الممدود من رأس المخروط المساعدا بالتوازي لرؤس الاسطوانة ملاقيا المستوى  
الأفقي في نقطة داخل قاعدته المستديرة

(نتيجة) اذا أريد حل نفس هذه المسئلة على مخروط معين ذي قاعدة حيثما اتفق لزم تنويع الحل بأن تجعل رأس المخروط المعلوم رأس المخروط المتحرك المساعد ثم بعد ذلك يرسم مستقيم مماس مشترك لقاعدتي المخروطين فيكون هو الاثر الافقي للمستوى المطلوب  
\*(مسائل للحل)\*

بـ ١٦٣ د المطلوب مذهب مستقيم مماس لمخروط معلوم من نقطة معلومة بشرط ان يكون موازيا للمستويين

المطلوب رسم مستوي مماس لاسطوانة معلومة أو لمخروط معلوم بشرط ان يكون عموديا على مستوي معلوم

المعلوم مسقطا محورا اسطوانة متحركة وطول نصف قطرها والمطلوب إيجاد أثرها على المستوى الافقي ومحيطها الظاهريين (أثر الاسطوانة على مستويها هو خط تقاطعها بذلك المستوى)

\* (في تمة حل الزاوية المجسمة الثلاثية) \*

بـ ١٦٤ د قد نبهنا في بـ ٨٩ على ان الثلاث حالات الاخيرة من الست حالات المتعلقة بحل الزاوية المجسمة الثلاثية المندرجة في بـ ٧٨ وان كان يتيسر حلها باستعمال الزاوية المكملية وتؤول بذلك الى الثلاث حالات الاول لكن قلنا انه يمكن حل هذه الثلاث حالات الاخيرة بمحاول قائمة بنفسها ووعدنا أنه من بعد نهو الكلام على المستويات المماسية للسطوح المنحنية نعود لتتميم حل تلك الثلاث حالات والآن حيث قد سنحت لنا الفرصة وأن أوان الكلام على ذلك فنقول

بـ ١٦٥ د الحالة الرابعة - المعلوم زاويتان زوجيتان مثل ا ب من زاوية مجسمة ثلاثية ووجهه مقابل لاحدهما كالوجه ب والمطلوب إيجاد الاشياء الباقية

(شكل ٩٤ لوحة ٢٣) لنأخذ مستوى الوجه ج المجهول مستويا افقيا للسقط ونرسم فيه منطبق الوجه المعلوم ب وليكن هذا المنطبق هو ا س ج وبعد ذلك نمرر مستويا رأسيًا مثل د ه ف عموديا على س ا ونرسم فيه الزاوية د ه و مساوية للزاوية الزوجية ا المعلوم من منطوق المسئلة وحينئذ فلودورنا الوجه ا س ج حول اس الى أن يأتي في المستوى س ه و لانتقلت نقطة و الى د التي تنسقط أفقيا في نقطة د ثم لاجل تركيب الزاوية المجسمة لم يبق سوى ان يمرر بنا لمخرف (س د و ه د) مستويا

يكون صانع المستوى الأفقي زاوية مساوية للزاوية الزوجية ب وذلك بعد  
في المستوى الرأسى هـ ف مستقيم مثل د ف بحيث يصنع الزاوية د ف د = ب ثم بعد  
ان يتوهم دوران هذا المستقيم حول الرأسى د و لولمخروطا تحركا قاعدته هي الدائرة  
د ف يرسم مستو مماس لهذا المخروط وماز بالحرف (س د هـ) فيكون أثر هذا  
المستوى هو المستقيم س ح ب الممدود من نقطة س مماسا لدائرة التي نصف قطرها  
د ف وهذا الاثر هو الحرف الثالث من الزاوية المجسمة التي نحن بصددها وبه يتحدد  
الوجه اس ب = ح وأما الوجه الثالث المنطبق هنا على ب س د ف من المشاهد

بالسهولة انه يتحصل بأن يؤخذ على العمود د ح طول مثل د ع مساو للراسم د ف من  
المخروط المماس له هذا الوجه

ب ١٦٦ د (الحالة الخامسة) المعلوم من الزاوية المجسمة الثلاثية زاويتان زوجيتان  
مثل ا ب و والوجه المنحصر بينهما ح والمطلوب ايجاد الاجزاء الباقية

(شكل ٩٥ لوحة ٢٣) محل هذه المسئلة ترسم على المستوى الأفقي زاوية مثل اس ب = ح  
لتدل على الوجه المعلوم ثم ترمس متو ب ا رأسيا مثل هـ ف عموديا على الحرف س ا وترسم  
فيه زاوية ف هـ ف مساوية للزاوية الزوجية ا وبمثل ذلك ترسم زاوية ح ك ع = ب  
في مستو عمودي على الحرف س ب وحينئذ فالمتو ب ا و س هـ ف و س ك ع يكونان  
هما مستويا الوجهين المجهولين من المجسمة الثلاثية ولاجل الحصول على نقطة ثانية  
مثل د من المسقط س و د لفصلهما المشترك يكفي ان يقطعاه بمستوا فقي واحد مأخوذ  
بالاختيار وبناء على ذلك يؤخذ الارتفاع هـ س مساويا للارتفاع ك ع ثم بعد ذلك  
لورسم المستقيمان ش ف و ك ع موازيين على التناظر لخطي الارض هـ ف و ك ع  
تحصل خطا التقاطع الأفقيان وهما ق د و ع و الاذان يعطيان بتقاطعهما نقطة د  
التي يبحث عنها وأخيرا لاجل تطبيق الوجهين المتقاطعين في خط س و د يؤخذ العمود  
م د = هـ ف والعمود د ع = ك ع وعليه فتكون حقيقة هذين الوجهين هي المبينة  
بالزاويتين اس ح و ب س ح وذلك بفرض ان الوجهين المذكورين قد دارا حول حرفي  
س ا و س ب حتى انطبقا على المستوى الأفقي

ب ١٦٧ د (الحالة السادسة) المعلوم من الزاوية المجسمة الثلاثية زواياها الزوجية الثلاث

وهي  $a, b, c$  والمطلوب إيجاد الثلاثة وجوه  
 (شكل ٩٦ لوحه ٢٣) لحل هذه المسئلة نعتبر أولاً ان المستوى الافقى للمسقط هو مستوى  
 الوجه المجهول  $c$  ونرسم فيه المستقيم الاختياري  $a$  ونعتبر انه أحد جرفي الوجه  
 المذكور ثم نأخذ مستوي رأسي عمودياً على  $a$  ونرسم فيه زاوية  $\alpha$  مساوية  
 للزاوية الزوجية المعلومة  $a$  وبناء على ذلك يكون مستوى  $\alpha$  هو مستوى الوجه  
 $b$  ثم نتخبط نقطة مثل  $t$  بالاختيار داخل الزاوية  $\alpha$  وننزل منها العمودان  
 $ts$  و  $te$  على الوجهين  $c$  و  $b$  ونرسم زاوية  $\beta$  ف  $ts$  وزاوية  $\gamma$   $te$   $= \gamma$   
 وحينئذ فلودورنا هاتين الزاويتين حول المحورين  $ts$  و  $te$  لتولد عنهما مخروطان  
 تحريكان ويكون بداهة الوجه المجهول  $c$  مماساً لهما بحيث قد آلت المسئلة الى رسم  
 مستويين في آن واحد كلاهما من المخروطين المذكورين اللذين رأسهما المشتركة هي  
 نقطة  $t$  وقاعدتهما الدائرتان المرسومتان بنصفي القطرين  $ts$  و  $te$  ولاجل  
 حل هذه المسئلة الفرعية حلاً سهلاً يبحث عن الاثر الافقى للمخروط الثاني  $te$   $\gamma$   
 ويرسم مماس مشترك لهذا الاثر المنحني والدائرة التي نصف قطرها  $ts$  ف انما يكون أثر  
 المخروط يتعين نقطة فنقطة وبالضرورة يكون رسمه تقريراً يبتدأ فتجنباً لهذا الرسم التقريبي  
 يستعان على الحل بمساعدة الاعتبارات الآتية  
 نرسم داخل المخروط  $ts$   $\beta$  كرة مماسة له في طول الدائرة الافقية  $ts$   $\beta$  وللحصول  
 على مركز هذه الكرة يرسم المستقيم  $ts$   $\beta$  العمودي على سطح هذا المخروط في نقطة  $f$   
 ثم ولايجاد كرة أخرى مساوية للأولى ومرسومة داخل المخروط الثاني  $te$   $\gamma$  أعني  
 مماسة له من الداخل ينبغي أن يقام على المستقيم  $te$   $\gamma$  العمود  $ts$   $\gamma$  ويتم  
 متوازي الاضلاع  $ts$   $\gamma$  الذي به يتعين المركز  $ts$   $\gamma$  للكرة الجديدة ونصف قطرها  
 $ts$   $\gamma$  اذا تقر هذا فلتتصور اسطوانة مماسة لهاتين الكرتين معاً فتسمهما بالضرورة في  
 دائرتين عظيمتين عموديتين على محورها وهو المستقيم  $ts$   $\gamma$  ومن حيث ان المستوى الذي  
 يمر المخروطين معاً يلزم بالضرورة أن يكون مماساً للكرتين في آن واحد فحينئذ يجب  
 أن يكون مماساً أيضاً للاسطوانة الحالية وعليه فتؤول المسئلة الى أن يرسم من نقطة  $t$   
 مستويين مماسين لهذا السطح الاسطواناني المفرد



وبناء على ذلك فاطريقة المسألة هي أن يرسم في المستوى  $\gamma\gamma'$  العمودي على المحور  $\gamma\gamma'$  دائرة بنصف قطر مساو إلى  $\gamma\gamma'$  ثم يرسم لهذه الدائرة مستقيم مماس لها من نقطة تقابل هذا المستوى بالمستقيم المرسوم من نقطة  $\gamma$  موازيا إلى المحور وكل ذلك كان يمكن اجراءه في الانطباق على المستوى الأفقي لكن توجد أيضا طريقة أقصر من ذلك بكثير وفي الواقع حيث يجب أن يكون المستوى المطلوب مماسا في آن واحد لكل من الاسطوانة والكورة  $\gamma\gamma'$  والمخروط  $\gamma\gamma'$  و فنقطة تماسه بالكورة المذكورة يلزم أن تكون موجودة أولا على الدائرة الأفقية  $\gamma\gamma'$  التي هي منحنى تماس الكورة بالمخروط وثانيا على الدائرة العظيمة الموجودة في المستوى  $\gamma\gamma'$  التي هي منحنى تماس الكورة المذكورة بالاسطوانة وبما أن هاتين الدائرتين متقاطعتان بالضرورة في وتر منسقط رأسها في نقطة  $\gamma$  ووضعنا المحققين مبين على المستوى الأفقي بالمستقيم  $\gamma\gamma'$  فنثبت تكون نقطة  $\gamma$  هي نقطة التماس والمستقيم  $\gamma\gamma'$  هو الاثر الأفقي للمستوى المماس المطلوب وأثره الرأسى الذي يجب أن يمر بالرأس  $\gamma$  يكون بناء على ذلك عبارة عن المستقيم  $\gamma\gamma'$

وحيث أننا علمنا مقدار حقيقة الوجه الأفقي وهي  $\gamma\gamma' = \gamma\gamma'$  وعلم أيضا المسقط  $\gamma\gamma'$  للحرف الذي يتقاطع فيه المستويان  $\gamma\gamma'$  و  $\gamma\gamma'$  فلم يبق علينا سوى أن نطبق هذين المستويين الأخيرين حول محوري الدوران  $\gamma\gamma'$  و  $\gamma\gamma'$  فيتمحصل بالسهولة الوجه  $\gamma\gamma' = \gamma\gamma'$  والوجه  $\gamma\gamma' = \gamma\gamma'$  وليلاحظ أن الحرف المنطبق على  $\gamma\gamma'$  ينبغي أن يكون مماسا للدائرة المرسومة من نقطة  $\gamma$  بنصف قطر مساو إلى  $\gamma\gamma'$  لأن هذه الدائرة هي قاعدة المخروط الثاني  $\gamma\gamma'$  الذي بمسه المستوى  $\gamma\gamma'$  أيضا

---

الى هنا انتهى الجزء الاول من كتاب البراعة المشرقية في علم الهندسة الوصفية وهو المقدار الذي تقررت درسه لتلامذة التجهيزية قبل ان تقام لهم ادرسة الهندسة بخانه وذلك بناء على ما قرره مجلس التحسينات للدرسة المذكورة في احدى جلساته ويليها الجزء الثاني وأوله الباب الثالث في المستويات المماسية للسطوح التحريكية وفي السطوح القابلة للانبطاس والسطوح المحاصرة

\* (١٢١) \*

وكان تمام طبعة مع أطلس الرسومات المتعلقة به في يوم السبت الخامس عشر من شهر  
جمادى الأولى سنة ١٣٠٠ هجرية في ظل من تعطرت بثنائه الأفواه وباغ من كل وصف  
جميل منتهاه خديوينا المعظم محمد باشا توفيق أدام الله بقاءه وانجلاه الكرام وذلك  
في عهد نظارة الوزير الانخم والامير الاعظم سعادة احمد خيرى باشا أبى الله طيب  
حياته وأدام كمال المعارف بحسن عناياته بمطبعة ديوان عموم المعارف مباشرة  
بمسالىمة حضرة ملاحظها النقيب حسين افندى صبرى وبصحبة  
حضرات محمى المطبعة ومشاركة حضرة مؤلفه الامى الكامل

والجهدى الفاضل صابر افندى صبرى لهم

في ذلك والمجد لله على التمام وعلى

رسوله أفضل الصلاة

وأتم السلام

آمين



\* (١) \*

\* (فهرست الجزء الاول من كتاب البراعة المشرقية في علم الهندسة الوصفية) \*

\* (الباب الاول) \*

(في الخطوط المستقيمة والمستويات)

مصحفة

- ٣ الفصل الاول في بيان الغرض الاصل من علم الهندسة الوصفية  
٥ طريقة المساقط  
٨ تحويل مستوي المسقط الى مستوي واحد  
١٢ قواعد في التنقيطان المصطلح عليهما  
١٤ الفصل الثاني في مسائل متنوعة على المستقيمت والمستويات  
١٥ طريقة ايجاد البعد الحقيقي بين نقطتين  
١٧ طريقة ثانية لحل هذه المسألة  
١٩ تعيين المستويات بحسب شروط معاليمها  
٢٤ تقاطع المستويات مع بعضها  
٣١ المساقط المساعدة  
٣٥ في المستقيمت والمستويات المتعامدة  
٤٠ زوايا ميل المستقيمت والمستويات على بعضها  
٤٨ ايجاد البعد الاصغر بين مستقيمين غير موجودين في مستوي واحد  
٥٠ الفصل الثالث في تغيير مستويات المسقط  
٥٣ في المسائل التطبيقية على ما تقدم  
٥٥ الفصل الرابع في المسائل المختصة بحل الزاوية المحسمة الثلاثية  
٦٠ في رد الزاوية الى الافق  
٦٥ الفصل الخامس في كثيرى السطوح المنتظمة

\* (الباب الثاني) \*

(في الخطوط المنحنية والسطوح وطرق تولدها والمستويات المماس لها).

- ٧٠ الفصل الاول في الخطوط المنحنية على العموم ومماساتها وخواصها  
٧٥ مبادئ المنحنيات المستوية  
٨٠ الفصل الثاني في تعاريف السطوح وفي طرق تولدها وأنواعها

















